Axioma del Supremo

Felipe Riquelme

Uno de los axiomas más potentes en el cuerpo de los números reales es el *Axioma del Supremo*. Este nos habla de la completitud del conjunto de números reales, completitud que se ve traducida de manera intuitiva en el borde de los subconjuntos acotados de $\mathbb{R}$. Para entender en plenitud en qué consiste, debemos definir matemáticamente ciertas nociones que parecen ser naturales en el lenguaje cotidiano.

Definición 1. *Sea A un subconjunto de los números reales. Una cota superior (resp. cota inferior) de A es un elemento $c \in \mathbb{R}$ tal que para todo $a \in A$ se satisface $a \leq c$ (resp. $c \leq a$).*

Supongamos que nuestro conjunto A es el intervalo unitario $[0,1]$. Este conjunto tiene cota superior y cota inferior. En efecto, 2 es una cota superior y 0 es una cota inferior. Una cota superior (o inferior) no es necesariamente única. De hecho, 3 es también una cota superior de $[0,1]$, así como -1 es cota inferior.

Es necesario enfatizar en el hecho siguiente, relacionado a la existencia. Un subconjunto de números reales no tiene por qué admitir una cota superior o inferior. Los números naturales (vistos como subconjunto de números reales) no son acotados superiormente.

Definición 2. *Sea A un subconjunto de los números reales. Un elemento maximal (resp. elemento minimal) de A es un elemento $x \in A$ tal que para todo $a \in A$ se tiene $a \leq x$ (resp. $x \leq a$).*

La definición de elemento maximal o minimal está íntimamente relacionada con la de cota superior o inferior. De hecho, un elemento maximal es por definición una cota superior del conjunto. De manera análoga, un elemento minimal es una cota inferior del conjunto.

Por otra parte, así como en el caso de las cotas, la existencia de un elemento maximal o minimal no está garantizada. Los naturales no tienen ningún elemento mayor o igual que el resto.

El ejemplo siguiente nos servirá de introducción para entender el axioma del supremo. Consideremos el conjunto $A = [0,1)$, es decir, todos los reales comprendidos entre 0 y 1, incluyendo el 0 y excluyendo el 1. Una cota superior de A es 1, o 2, o 3... en fin, claramente A admite cota superior. Lo remarcable en este caso es que A no contiene un elemento maximal. En efecto, cualquier número x menor estricto que 1 no puede ser maximal. Si $0 < x < 1$ entonces el número $y = (x+1)/2$ satisface $x < y < 1$. En palabras simples, para cualquier elemento de A puedo encontrar otro elemento de A estrictamente superior. Uno estaría tentado a pensar entonces que 1 es un elemento maximal, pero debemos recordar que por definición un elemento maximal debe permanecer al conjunto.

Resumiendo lo anterior, hay una leve diferencia entre elemento maximal y cota superior (resp. elemento minimal y cota inferior). El axioma del supremo nos da una herramienta perfecta para asegurar la existencia de un elemento que permita comparar estas nociones cuando corresponde. Pero antes de su enunciado, nos resta una última definición...

Definición 3. *Sea A un subconjunto de los números reales. El supremo de A es la menor de las cotas superiores.*

Como lo hemos señalado anteriormente, resulta complicado hablar de la existencia de tal supremo. Es por esto mismo que necesitamos un axioma que nos hable de ella.

Axioma 4. *[Axioma del Supremo] Todo subconjunto de los números reales, acotado superiormente, tiene un supremo que pertenece a los reales.*

Si A es un subconjunto de los reales, podemos pensar siempre en el conjunto B conformado por todas las cotas superiores de A. El axioma del supremo nos dice que si B es un conjunto no vacío, entonces B tiene un elemento minimal. Tal elemento minimal es llamado supremo de A.

Una última observación importante es que el supremo de A no es necesariamente un elemento maximal de A. En el ejemplo cuando $A = [0, 1)$ se tiene que 1 es una cota superior de A, de hecho, es el supremo de A, pero claramente 1 no pertenece a A por definición. Curiosamente, si A admite un elemento maximal, entonces dicho elemento será el supremo.

Para finalizar queda aclarar el porqué es tan importante este axioma. Olvidémonos de $\mathbb{R}$ y pensemos en el cuerpo de los racionales $\mathbb{Q}$. Consideremos el subconjunto A de $\mathbb{Q}$ definido como sigue

$$A = \{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \ : p, q \in \mathbb{N},\ p^2 \leq 2q^2\}.$$

El conjunto A está acotado superiormente. En efecto 2 es una cota superior. Para verlo, basta definir el conjunto B por

$$\begin{aligned} B &= \{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \ : p, q \in \mathbb{N},\ p^2 \leq 4q^2\} \\ &= \{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \ : p, q \in \mathbb{N},\ p \leq 2q\} \end{aligned}$$

Es claro que A es un subconjunto de B. Entonces, toda cota superior de B es necesariamente una cota superior de A. Pero B es el conjunto de todos los números racionales positivos menores o igual a 2. Entonces 2 es cota superior de A. Si $x \in \mathbb{Q}$ fuera un supremo de A, entonces $x^2 = 2$, pero lamentablemente no existe un racional tal que su cuadrado sea 2. Si pensamos en $\mathbb{Q}$ como subconjunto de $\mathbb{R}$, entonces el supremo que estamos buscando es $\sqrt{2}$.