CONTROL 1 (PAUTA)
CÁLCULO 3 (IMA1301).

Problema 1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y,z) = \frac{x+y+z}{1+x^2+y^2+z^2}.$$

Encuentre un $\delta > 0$ explícito asociado a $\epsilon = 0.2$ en la definición de continuidad en el punto $(1,1,2)$.

Solución: Observemos primero que $f(1,1,2) = 4/7$. Para encontrar tal δ debemos acotar primero el término $|f(x,y,z) - f(1,1,2)|$ por arriba para forzar que este sea menor que ϵ.

$$\begin{aligned} |f(x,y,z) - f(1,1,2)| &= \left| \frac{x+y+z}{1+x^2+y^2+z^2} - \frac{4}{7} \right| \\ &= \left| \frac{7(x+y+z) - 4(1+x^2+y^2+z^2)}{7(1+x^2+y^2+z^2)} \right|. \end{aligned}$$

Como $1+x^2+y^2+z^2 \geqslant 1$ independientemente de los valores de x, y y z, concluímos que

$$|f(x,y,z) - f(1,1,2)| \leqslant |7(x+y+z) - 4(1+x^2+y^2+z^2)|. \tag{1}$$

Recordemos ahora que si $\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2} < \delta$, entonces $|x-1|, |y-1|, |z-2| < \delta$. Forzamos entonces la aparición de estos últimos términos en la ecuación (1). El término a la derecha en (1) satisface

$$\begin{aligned} &= |7([x-1+1] + [y-1+1] + [z-2+2]) - 4(1 + [x-1+1]^2 + [y-1+1]^2 + [z-2+2]^2)| \\ &= |7(x-1) + 7 + 7(y-1) + 7 + 7(z-2) + 14 \\ &\quad -4(1 + (x-1)^2 + 2(x-1) + 1 + (y-1)^2 + 2(y-1) + 1 + (z-2)^2 + 4(z-2) + 4)| \\ &= |7(x-1) + 7(y-1) + 7(z-2) + 28 \\ &\quad -4((x-1)^2 + 2(x-1) + (y-1)^2 + 2(y-1) + (z-2)^2 + 4(z-2) + 7)| \\ &= |7(x-1) + 7(y-1) + 7(z-2) - 4(x-1)^2 - 8(x-1) - 4(y-1)^2 - 8(y-1) - 4(z-2)^2 - 16(z-2)| \\ &= |-(x-1) - (y-1) - 9(z-2) - 4(x-1)^2 - 4(y-1)^2 - 4(z-2)^2| \\ &= |(x-1) + (y-1) + 9(z-2) + 4(x-1)^2 + 4(y-1)^2 + 4(z-2)^2|. \end{aligned}$$

Aplicando desigualdad triangular en todos los términos, nos queda

$$\begin{aligned} |7(x+y+z) - 4(1+x^2+y^2+z^2)| &\leqslant |x-1| + |y-1| + 9|z-2| + 4|x-1|^2 + 4|y-1|^2 + 4|z-2|^2 \\ &< \delta + \delta + 9\delta + 4\delta^2 + 4\delta^2 + 4\delta^2 \\ &= 11\delta + 12\delta^2 \\ &\leqslant 23\delta, \end{aligned}$$

con la última desigualdad siendo válida bajo la condición $0 < \delta \leqslant 1$. En resumen, hemos mostrado que si $\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2} < \delta$, entonces

$$|f(x,y,z) - f(1,1,2)| < 23\delta. \tag{2}$$

Si definimos δ como $\delta = \min\{1, 0.2/23\} = 0.2/23$, entonces necesariamente la desigualdad (2) nos dice

$$|f(x, y, z) - f(1, 1, 2)| < 0.2,$$

que era lo que queriamos mostrar.

Problema 2. Estudie la diferenciabilidad de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{|xy|}}{|x|+|y|} & , \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ si } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

en el punto $\mathbf{p} = (0, 0)$.

Solución: Una condición necesaria para tener diferenciabilidad en $\mathbf{p}$ es que la función sea continua en $\mathbf{p}$. Pero si nos acercamos al origen por la recta $y = x$, nos queda que f es igual a

$$\frac{\sqrt{|x^2|}}{|x| + |x|} = \frac{|x|}{|x| + |x|} = \frac{1}{2},$$

por lo que en tal camino el límite es distinto a $f(0, 0) = 0$. Así, la función es discontinua en $\mathbf{p}$, y en particular, no diferenciable en $\mathbf{p}$.