Desde el Teorema de Incompletitud de Gödel hasta la Conjetura de Collatz

Felipe Riquelme

En matemática existe una cantidad creciente de problemas abiertos. Problemas que día a día ponen a prueba las habilidades deductivas de aquellos que gozan de esta ciencia. Los hay de todo tipo, problemas cuyo enunciado es entendible por niños con un vago conocimiento de la aritmética, hasta aquellos que ni siquiera un recién egresado de doctorado puede comprender. La respuesta a una pregunta resulta ser la cuna de muchas otras.

Kurt Gödel fue un Filósofo-Matemático nacido a comienzos del siglo XX. En 1931, con tan solo 25 años, demostró uno de los teoremas lógico-matemático que revolucionó estas áreas del conocimiento, y es menester decir, lo sigue haciendo. El Teorema de Incompletitud de Gödel nos dice que toda *teoría aritmética recursiva y consistente* es *incompleta*.

Para entender el enunciado de este teorema debemos definir varias palabras expuestas en él. Una teoría formal es un conjunto de proposiciones, manipulable mediante un lenguaje formal, y que resulta ser completo en base a este lenguaje. Es decir, si consideramos un modelo matemático que satisface todas las proposiciones en el conjunto, entonces toda consecuencia lógica del conjunto de proposiciones es a su vez cierta en tal modelo. Imaginemos por ejemplo al conjunto de los numeros naturales, dotado de los 5 axiomas de Peano (si no sabe lo que son, imagine que es un conjunto de axiomas que permiten definir a los naturales), y usemos el lenguaje lógico con sus cuantificadores y reglas usuales. Entonces todo teorema que se deduce a partir de los axiomas, usando al lenguaje lógico, es cierto en el modelo de los números naturales. En otras palabras, los teoremas que se deducen a partir de axiomas (las reglas válidas del juego) son válidos en mi teoría.

Una teoría aritmética es aquella cuyos símbolos sirven para describir a los números naturales. Por ejemplo, los axiomas de Peano y el lenguaje lógico clásico.

Una teoría recursiva es aquella cuyas reglas pueden manipularse mediante un algoritmo. Una serie de pasos que puedan llevarse a cabo (sin caer en confusiones) en un tiempo finito. Por ejemplo, una teoría recursiva puede manipularse usando programas informáticos.

Una teoría consistente es aquella que no cae en contradicciones. Esencialmente no puede suceder que una fórmula (o enunciado), y su respectiva negación, ocurran simultaneamente en algún modelo. Debo señalar que esta hipótesis es bastante importante. Una teoría que no es consistente no es matemáticamente interesante. En ella uno podría demostrar lo que uno quiera (toda afirmación que uno haga), independiente de si el razonamiento matemático es el incorrecto.

Finalmente, una teoría se dice completa si cada fórmula es demostrable, o bien su negación lo es. Una teoría completa es aquella donde uno está absolutamente seguro de qué fórmulas son verdaderas o falsas. Bueno, si uno no llegase a estarlo, uno está seguro que existe una demostración que nos permita determinar el valor de verdad de la fórmula.

¿Cuál es entonces la importancia del Teorema de Incompletitud de Gödel? Pues bien, este nos dice que en teorías como las del enunciado, existen enunciados cuya vericidad o falsedad no pueden ser demostradas. Esto es sin lugar a dudas algo decepcionante para un matemático.

Cuando un matemático intenta resolver un problema abierto, está apostando a que dicho problema sea de validez demostrable. Uno apuesta a que, o bien existe una demostración que permita darle un valor de verdad al enunciado, o bien existe un ejemplo en el cual todas las hipótesis se satisfacen, pero no así la tesis. Y lo peor de todo, no hay ningún mecanismo que nos permita clasificar a todos los problemas, separar aquellos que hacen al modelo incompleto con aquellos que son deducibles del lenguaje.

Personalmente, uno de los problemas abiertos más interesantes es la Conjetura de Collatz, formulada en el año 1937 por Lothar Collatz. Para conocerla uno debe jugar un poco con los números, y ser bueno con los cálculos. Consideremos un números natural $n \geq 1$. Si n es par entonces nos quedaremos con $n/2$. Si n es impar nos quedamos con $3n+1$. Al resultado le aplicamos la misma operación, dependiendo de si este es par o impar. Reiteramos una y otra vez y formamos así una sucesión de números naturales. Por ejemplo, si $n = 4$ nos queda $\{4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...\}$, y para $n = 6$ nos queda $\{6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1...\}$. En ambos casos eventualmente llegamos a la secuencia $4, 2, 1$. Si vamos un poco más lejos y seguimos formando sucesiones, llegamos a la conclusión que para los primeros diez, veinte, treinta,... incluso mil naturales, la sucesión termina eventualmente en la secuencia $4, 2, 1$. Con la ayuda de los computadores podemos analizar lo que sucede para valores de n bastante grandes. En el año 2005 se comprobó que los primeros 2^{58} naturales satisfacen esta propiedad. Lamentablemente, aún hay infinitos términos por comprobar.

Conjetura 1. *[Conjetura de Collatz] Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por*

$$f(n) = \begin{cases} n/2, & \text{si } n \text{ es par} \\ 3n+1, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Entonces, para todo natural $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{n, f(n), f \circ f(n), ...\}$ alcanza eventualmente la secuencia $4, 2, 1$.

La gran pregunta que nos queda es si la Conjetura de Collatz cae en el grupo de preguntas cuya respuesta será siempre desconocida. Esperemos que no. Esperemos que corra la misma suerte que la Conjetura de Fermat, ahora llamada Teorema de Fermat-Wiles.