Conejos, Proporciones y Agujeros Negros

Felipe Riquelme

Las matemáticas nos fascinan por su elegancia, por su infinita utilidad para lograr traducir problemas complicados en otros más simples. Estas nos ayudan a permanecer en un constante crecimiento. Nos ayudan a comprender el universo, desde lo material hasta lo abstacto. Pensemos por ejemplo en el siguiente problema que surgió al observar cierto comportamiento reproductivo de los conejos:

Comenzamos con una pareja de conejos. Estos al cabo de un mes pueden tener otra pareja de conejos, que solo puede reproducirse en su segundo mes de vida. Queremos estudiar el crecimiento de la población de conejos a partir de esa sola pareja. La llamaremos pareja 1. Si suponemos que desde el comienzo del estudio la pareja 1 es recién nacida, entonces al final del primer mes estos podrán cruzarse y reproducirse. Al comienzo del segundo mes contamos con una sola pareja. Al término el segundo mes nace otra pareja, llamemosla pareja 2. Empieza el tercer mes y ahora tenemos dos parejas, la pareja 1 puede volver a cruzarse y la pareja 2 está en crecimiento. Termina el tercer mes y la pareja 1 vuelve a tener otra pareja de conejos, una pareja 3. En este momento la pareja 2 tiene un mes. Así que comenzando el cuarto mes, contamos con 3 parejas, la pareja 1 y 2 pueden cruzarse, la pareja 3 está en crecimiento. En fin... luego de un tiempo nos damos cuenta que la cantidad de parejas que tenemos al comienzo de cada mes está dada por la siguiente sucesión de números

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...\}$$

donde el número en la n-ésima posición representa la cantidad de parejas que tenemos al comienzo del n-ésimo mes.

Leonardo de Pisa, más conocido como Fibonacci, describió este comportamiento y lo representó mediante una sucesión recursiva (llamada *sucesión de Fibonacci*). Si llamamos a_n la cantidad de parejas que tenemos al comienzo del mes n, entonces a_n está determinada por la cantidad de parejas que se tienen al comienzo de los dos meses anteriores. En efecto, obtenemos

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Para determinar entonces todos los valores de la sucesión es necesario conocer los dos primeros términos, a saber, $a_1 = 1, a_2 = 1$... y luego echamos la máquina a correr.

La sucesión de Fibonacci esconde un secreto que ha maravillado a muchos matemáticos. Existe una proporción entre los términos de ella. Para encontrarla vamos a considerar el término $b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, que representa la razón que hay entre un término y su predecesor. Unos simples cálculos nos permiten encontrar los primeros términos para b_n, ellos son $1, 2, 1.5, 1.\overline{6}, 1.6, 1.625, 1.615, 1.619, ...$ Pareciera que en la medida que consideramos más meses, la proporción de parejas de un mes respecto al anterior se va estabilizando hacia alguna constante.

Hagamos un poco más de matemática. El objetivo es encontrar la razón de proporcionalidad asintótica en los términos de la sucesión de Fibonacci. Todo aquél familiarizado con el álgebra lineal, o más sencillo, con las matrices, podrá verificar que la sucesión a_n satisface

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix},$$

es decir, a partir de la matriz A definida como

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

podemos encontrar los términos siguientes. Esto pareciera no aportar mucho, pero si lo pensamos bien, tenemos que

$$A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Ahora la parte entretenida... consideremos la aplicación lineal $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $v \mapsto Av$. Como A es una matriz simétrica, el teorema espectral de álgebra lineal nos dice que ella es diagonalizable. Es decir, existe una matriz diagonal D, y una matriz de cambio de base P, tal que

$$A = PDP^{-1}$$

La matriz D tiene como valores en su diagonal (los *valores propios*) a $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Por su parte P está formada por los vectores propios correspondiente a los valores propios. Así

$$A^n = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

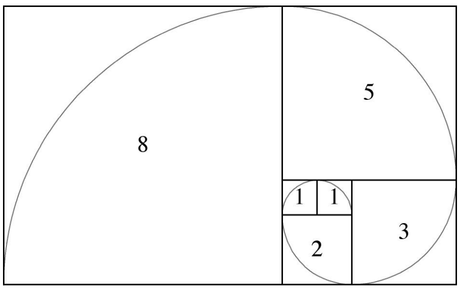
Un cálculo explícito, junto con un poco de manipulación, nos permite encontrar los términos exactos para la sucesión de Fibonacci. Recordemos que estos aparecen naturalmente al iterar por T_A al vector $(1,1)$. Así

$$a_n = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}[\lambda_1^n - \lambda_2^n].$$

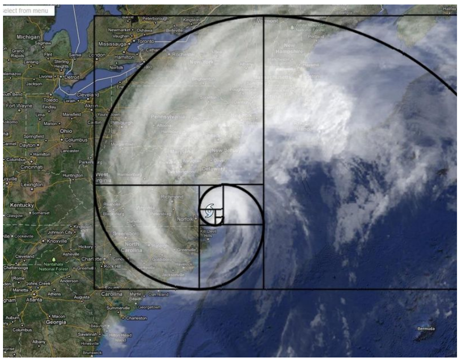
Finalmente es fácil verifical que $|\lambda_1| > 1$ y que $|\lambda_2| < 1$, por lo que $|\lambda_2^n|$ tiende a 0 cuando n crece a infinito. En otras palabras

$$b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \to \lambda_1 \;\text{ si }\; n \to \infty.$$

Pongámosle nombre a λ_1. Llamemosle φ, el *número áureo*. Así nos queda $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Este número, que por ahora representa la proporcionalidad asintótica de un mes a otro en la reproducción de conejos, aparece de muchas otras formas en la naturaleza. Para graficarlo usando la sucesión de Fibonacci, consideremos cuadrados de área a_n como en la figura. Si adecuadamente unimos 1/4 de arcos de circunferencia, podemos formar una espiral, la famosa *espiral áurea*.



Aparentemente la naturaleza tiene una preferencia por usar la proporción áurea en sus diversas formas. Las imágenes a continuación nos muestras el cómo se manifiesta la espiral...



Incluso Leonardo Da Vinci conocía la importancia de esta. Aparentemente él logró darse cuenta de que el cuerpo humano está formado de tal manera que el número áureo aparece como proporción en diversas de sus partes. Esto se vió reflejado en varias de sus obras, por ejemplo, la *Mona Lisa*.

Uno podría pensar que conocer la fuerza de esta proporción, en esa época, es descabellado. Pero el conocimiento se remonta a mucho antes. Los egipcios construyeron la Pirámide de Keops a partir de la proporción áurea. Y si eso ya es suficientemente sorprendente, φ aparece también en los agujeros negros. Estos pasan de calentarse a enfriarse cuando el cuadrado de su masa dividido entre el cuadrado de su velocidad de rotación alcanza el valor de φ. Da para pensar, ¿o no?