# Teorema de Convergencia Monótona Para Sucesiones

Felipe Riquelme

Cuando de sucesiones reales se trata, encontrar criterios de convergencia de estas es bastante complicado. Asegurar que los términos de la sucesión se acumulan en un solo límite está lejos de ser algo que suceda en casi todos los casos. Sin embargo gracias al estudio de los comportamientos de las sucesiones es que se desarrolló en su tiempo bastante teoría al respecto, dando origen a los puntos de acumulación, límites su superiores e inferiores, entre otros. A continuación daré la demostración del criterio de convergencia por excelencia, el cuál es bastante útil para ciertos cálculos elementales.

**Teorema 1.** *Toda sucesión creciente (decreciente) y acotada superiormente (inferiormente) de números reales es convergente.*

La idea de la demostración es la siguiente. El hecho de que una sucesión sea creciente (resp. decreciente) nos dice que la sucesión se dirige a un solo lado de la recta real. Pensemos en la sucesión como si estuvieramos caminando progresivamente en una dirección y el $n$-ésimo término de ella nos da nuestra posición. El hecho que esta sea acotada superiormente (resp. inferiormente), nos dice que tenemos un límite para avanzar, y no podemos sobrepasarlo. Por más que vayamos en una dirección, nos quedaremos estancados sin poder ir más lejos (salvo pequeñas distancias que no aportan nada para superar a la cota superior o inferior).

**Démonstración:** Consideremos una sucesión $(a_n)$ de números reales, la cual supondremos creciente y acotada superiormente. El otro caso resulta ser análogo. Sea $A$ el conjunto de todos los términos de la sucesión, es decir

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}.$$

Como $A$ es un subconjunto acotado superiormente de números reales, podemos aplicar el *Axioma del Supremo*. Sea $S$ el supremo de $A$. Por definición de supremo, $S$ es la menor de las cotas superiores, eso implica dos cosas.

(i) $a_n \leq S$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

(ii) Para todo $\varepsilon > 0$, $S - \varepsilon$ no es cota superior, por lo que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $S - \varepsilon \leq a_N$.

El punto $(ii)$ es esencial, junto a la monotonía de la sucesión. Para $\varepsilon > 0$ hemos encontrado un término de la sucesión tal que dicho término es mayor o igual a $S - \varepsilon$. Pero por otra parte la sucesión es creciente, lo que quiere decir que para todo $n \geq N$ se tiene

$$S - \varepsilon \leq a_N \leq a_n.$$

Usando la desigualdad aquí descrita, junto al hecho $(i)$, obtenemos que para todo $n \geq N$

$$S - \varepsilon \leq a_n \leq S < S + \varepsilon$$

o escrito de manera análoga

$$|a_n - S| \leq \varepsilon.$$

Resumiendo... para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se tiene $|a_n - S| \leq \varepsilon$. Esta es justamente la definición de límite, por lo que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = S.$$

■

Como primer ejemplo podemos considerar la sucesión $a_n = 1 - \frac{1}{n}$. Esta es una sucesión creciente, puesto que entre más grande es el valor de $n$ entonces menor es el término que se le resta a 1 en la definición de $a_n$. Por otra parte, a 1 siempre se le resta un número positivo, por lo que $a_n \leq 1$. No es muy complicado verificar entonces que el límite existe, y de hecho, su límite es 1.

Un segundo ejemplo viene dado por las series numéricas. Sea $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$. Definimos entonces la sucesión $b_n$ por

$$b_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

La sucesión $b_n$ es creciente, pues es la suma de términos positivos, y cada término es la suma entre el término anterior y otro número positivo. Veremos ahora que $b_n$ es acotada superiormente. Daré mágicamente una cota, de hecho, aseguro que 2 es una de ellas. Mostrémoslo por inducción matemática. De partida $b_1 = 1 < 2$ por lo que claramente nuestra primera hipótesis de inducción se satisface. Supongamos que $b_n \leq 2$ y mostremos que $b_{n+1} \leq 2$. Un cálculo sencillo nos muestra que $b_n/2 = b_{n+1} - b_1$ por lo que $b_{n+1} = b_n/2 + 1 \leq 2/2 + 1 = 2$. Al tener que nuestras hipótesis de inducción se satisfacen, concluímos que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $b_n \leq 2$. Esto muestra que el límite de $b_n$ existe.

Una cosa es mostrar la existencia del límite, y otra muy distinta es calcularlo. En el ejemplo anterior hice algo que estaba demás probablemente. $b_n$ es una serie numérica que recibe el nombre de *Serie Geométrica*. Un cálculo conocido nos muestra que

$$b_n = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}},$$

por lo que si $n$ es suficientemente grande, $\frac{1}{2^n}$ es pequeño, y por lo tanto $b_n$ tiene por límite 2. Pero una sucesión por muy monótona que sea, y acotada ciertamente, no tiene ninguna razón de ser sencilla en cuanto a cálculo de su límite se refiere. Un ejemplo evidente de esto último es la sucesión que define al número de Euler $e$.

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$