Largo de Curvas en el Plano

Felipe Riquelme

Una de las primeras nociones que desarrollamos en nuestra vida es la *distancia*. Todo comienza probablemente cuando damos nuestros primeros pasos, nuestros padres nos instan a recorrer distancias más grandes, distancias que son precisamente medidas en pasos. Una vez crecidos, adoptamos distancias estandarizadas de acuerdo a la sociedad en la que nos desarrollamos, por ejemplo, el *metro*, la *milla*, las *yardas*, etc. Todas estas distancias tienen nombre, y en matemática no nos salimos de la regla. En geometría existen muchos tipos de distancia, la que más nos instan a conocer es la distancia *Euclideana*, la cual en algún sentido, independiente de la unidad de medida usada, la reconocemos pues es precisamente aquella que nos acerca a la realidad. Es aquella que podemos ver de manera explícita en nuestras vidas.

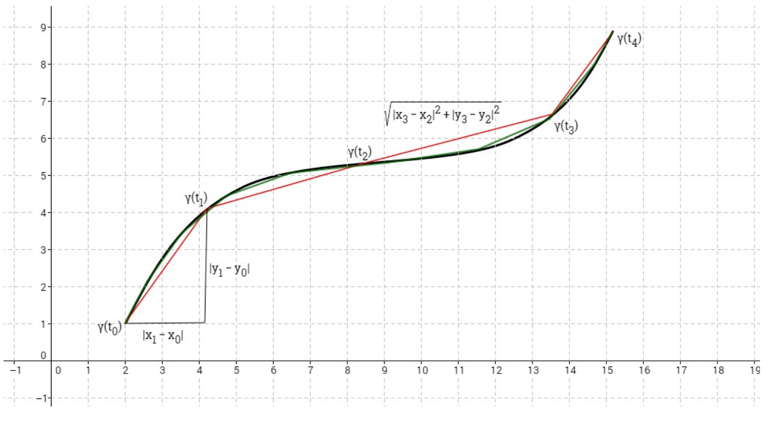
Si nuestro universo fuese solo una línea recta, el cuál podríamos ver como $\mathbb{R}$, entonces si vamos de un punto $x \in \mathbb{R}$ a un punto $y \in \mathbb{R}$, la distancia recorrida será $|x - y|$; es decir, el valor absoluto de la diferencia. Si nuestro universo fuese en cambio el plano $\mathbb{R}^2$ definido por

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

entonces la distancia euclideana entre (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es la medida de la línea recta que une a ambos puntos. Esta es igual (gracias al Teorema de Pitágoras) a

$$(|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

¿Por qué definimos la distancia de esa manera? Uno bien podría definir la distancia entre (x_1, y_1) y (x_2, y_2) por $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Pero bien sabemos que en la realidad no nos movemos siguiendo caminos exclusivamente horizontales o verticales. La verdad es que nos gustan las diagonales. Y nos gustan pues son precisamente estas las que minimizan las distancias. No entraré en detalles matemáticos específicos del porqué de este fenómeno. Me abrazaré a la consciencia universal de que todos manejamos la misma intuición, y asumiré que las diagonales son efectivamente los buenos caminos a medir.



El objetivo de este post es intentar medir curvas mas extrañas que las líneas horizontales, verticales o diagonales. Pero... ¿qué es una curva?. La manera más intuitiva de pensarlo es imaginar que tenemos un segmento de cuerda totalmente estirado. Su análogo matemático sería el intervalo $[0, 1]$. Ahora podemos manipular la cuerda como nosotros queramos. La torcemos, jugamos con ella, y lo que quede lo llamamos *curva*. El jugar con ella es en cierta manera mover *suavemente* la cuerda. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 1. *Una curva parametrizada en el plano euclideano* $\mathbb{R}^2$ *es la imagen de una función suave* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$.

En palabras concretas, si tenemos una curva parametrizada γ, entonces a cada $t \in [0,1]$ le asociamos un par ordenado $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$. A un punto del segmento de cuerda totalmente estirado le asociamos un punto de la cuerda deformada, la cual insisto, es una deformación suave.

¿Cómo medimos el largo de una curva?. La idea es bastante sencilla (aunque el cálculo está lejos de ser elemental). Cuando damos un paso en la vida diaria, ese paso debemos imaginarlo como un desplazamiento en línea recta. Así que cuando caminamos por una curva, y damos muchos pasos al recorrerla, lo que estamos haciendo en verdad es aproximar la curva por pequeños segmentos de recta. Nosotros no nos movemos de manera curva realmente, y esa es toda la idea. Una curva es aproximada por pequeños segmentos de recta, y entre más pequeños sean los segmentos, mejor es la aproximación.

Consideremos entonces una curva parametrizada $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$. Dividamos el intervalo $[0,1]$ en pequeños segmentos. Concretamente escogemos una colección finita de tiempos $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{n-1} < t_n = 1$. Las imagenes por γ de estos tiempos son puntos en la curva. Si queremos entonces aproximar el largo de la curva por los largos de los segmentos de recta, nos queda de manera explícita

$$L(\gamma) \approx \sum_{i=0}^{n-1} (|x(t_i) - x(t_{i+1})|^2 + |y(t_i) - y(t_{i+1})|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Hasta aquí todo es razonablemente entendible para alguien que no tiene conocimientos de cálculo. Lamentablemente debo hacer uso de la definición de la integral de Riemann para continuar. A los que no estén familiarizados con aquello, los motivo para que lean un poco al respecto.

Queremos aproximar el largo de curva por cosas que son pequeñas, digamos infinitesimalmente pequeñas. De esta forma la expresión de aproximación dada más arriba nos queda (luego de manipular la expresión de manera conveniente)

$$L(\gamma) \approx \sum_{i=0}^{n-1} \left(\left| \frac{x(t_i) - x(t_{i+1})}{t_i - t_{i+1}} \right|^2 + \left| \frac{y(t_i) - y(t_{i+1})}{t_i - t_{i+1}} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} |t_i - t_{i+1}|.$$

Si hacemos crecer n hasta infinito, el término a la derecha en la expresión de aquí arriba converge (no daré el porqué de aquello) a

$$\int_0^1 \left(\left| \frac{dx}{dt}(t) \right|^2 + \left| \frac{dy}{dt}(t) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt.$$

Hemos mostrado entonces que si la curva es suave, entonces es posible calcular su largo utilizando la integral de Riemann. El término nos queda

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt.$$

Ejemplo 2. *Sea* $\gamma(t) = (r\cos(2\pi t), r\sin(2\pi t))$, $t \in [0,1]$, *la parametrización de la circunferencia de centro* $(0,0)$ *y radio* r. *Un cálculo concreto de derivada nos dice que*

$$\gamma'(t) = (-2\pi r \sin(2\pi t), 2\pi r \cos(2\pi t)),$$

por lo que $\|\gamma'(t)\| = 2\pi r$. *Así*

$$\int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = 2\pi r$$

lo cual es sabido que corresponde al perímetro de una circunferencia de radio r.