Números Decimales

Felipe Riquelme

El sistema numérico decimal es una manera de entender a los números. Ésta está basada en la escritura de los números usando 9 dígitos junto al 0. Se cree que la antigüedad de ella (y por ende su faceta natural) proviene del simple hecho que los seres humanos tenemos 10 dedos en las manos, por ende, contar las cosas resulta más sencillo al guiarnos por los dedos.

En la antigüedad sin embargo no se tenía un sistema numérico posicional. Cuando de números grandes se trataba se utilizaban símbolos nuevos para describir los números. Esto resultaba bastante complicado a la larga, por lo que eventualmente fué natural que se estandarizara en casi todo el mundo el sistema numérico actual donde la posición y el dígito son importantes. Sin embargo debieron pasar cientos de años, desde los antiguos egipcios del año 2000 A.C. hasta después del primer milenio D.C.

La escritura decimal posicional es una buena escritura pues simplifica bastante los cálculos numéricos. La manipulación de grandes número se reduce a un montón de reglas que aprendemos desde pequeños. Lamentablemente la inmensa cantidad de reglas, y el tiempo reducido en el cual se nos fuerza a aprender, evita que uno se cuestione a fondo lo que realmente sucede detrás de las manipulaciones. La gente aprende un método, pero no aprende el porqué de este. Es ahí en donde cometemos un error bastante grande, pues si nos preguntaramos el porqué de cada método muchos no cometerian el error al cuestionarse la igualdad siguiente

$$0.\overline{9} = 1.$$

¿Qué sucede en la línea anterior?, ¿Es cierta la igualdad?... La respuesta es que la igualdad es cierta, pero lo que sucede detrás no es mágico ni sobrenatural, es una mala consecuencia de la forma en que escribimos los números. Es de esas cosas rebuscadas que no queremos que sucedan, es un precio que hay que pagar para obtener otras mejores como sumar o multiplicar fácilmente. Quizás un ejemplo es más pedagógico que una explicación formal.

Comencemos con un número cualquiera. Pondré mi número preferido de 4 dígitos... 6572. Este número que para nosotros parece tan natural como cualquier otro no es mas que una manera de escribir $6 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 2 \cdot 1$. En este tipo de escritura importa bastante el orden en que se escribe, pues representa una manera precisa de sumar ciertos números que si son bastante razonables de imaginar. Uno conoce el 10 pues uno tiene 10 dedos. Uno puede imaginar al 100 porque uno puede pensar en el área de un cuadrado de lado 10. Uno puede pensar en 1000 pues uno puede imaginarse el querer calcular el volumen de un cubo de lado 10. Uno puede seguir y seguir y eventualmente se concluye que las potencias de 10 son probablemente los números más intuitivos de entender para el hombre. Números más complicados merecen una manera mejor de escribir, mejor al menos que $6 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 2 \cdot 1$.

Imaginemos ahora al número 0,654. Nos enseñaron que este número es realmente 654/1000, una fracción. Y nos dijeron también que si escribimos 0,3333333333333... con infinitos 3 eso nos da 1/3. ¿Por qué infinitos 3?, ¿qué sucede si escribo infinitos decimales sin ningún tipo de periodicidad?... nos enseñaron que estos números son irracionales... que no son fracciones... pero... ¿qué hay detrás de todo esto?

Detrás de todo esto hay una simple idea. Así como un número natural lo representamos como sumas de ponderaciones (entre máximo 9 dígitos) de potencias de 10 positivas, podemos hacer lo mismo con las potencias negativas. El número 0,654 es solamente una forma de escribir al número

$$6 \cdot \frac{1}{10} + 5 \cdot \frac{1}{100} + 4 \cdot \frac{1}{1000}.$$

Y cuando escribimos $0.\overline{3}$ no es nada mas que una suma infinita de los términos $3 \cdot \frac{1}{10^n}$ donde n es un número natural. Dicho de otra forma

$$0.\overline{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n}.$$

Así que cuando queremos saber realmente qué es lo que sucede con $0.\overline{9}$, en realidad el número que ésta escritura representa es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n}$$

que luego de un simple cálculo nos da (usando una serie numérica)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} &= 9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} \\
&= 9 \left(\lim_{n \to \infty} \frac{1 - \frac{1}{10}^{n+1}}{1 - \frac{1}{10}} - 1 \right) \\
&= 9 \left(\frac{1}{1 - 1/10} - 1 \right) = 9 \cdot \left(\frac{10}{9} - 1\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Si no entienden el concepto, la idea es realmente sencilla. Cuando queremos ir de un lugar a otro en la vida cotidiana, tenemos muchos caminos posibles. Cuando queremos representar a un número usando una suma infinita de números, lo que puede pasar (¡y realmente sucede!) es que existan sumas distintas que nos den al final el mismo resultado. Pensemos en 1, en 11, en 111... y si lo hacemos infinitamente 111111111... Este último representa una suma infinita de potencias de 10. Eso es infinito. Pero si consideramos otra suma infinita, por ejemplo 735781871873... eso también nos dará infinito. ¿Por qué este mismo fenómeno no debería ocurrir con sumas infinitas de potencias negativas de 10?...

$0.\overline{9} = 1$ no es otra cosa que una igualdad entre una suma infinita y su resultado exacto. Eso no es un error matemático, es solo un precio a pagar al intentar describir facilmente los números en la recta real.

Si el lector no entiende lo que es una serie infinita, haga el cálculo siguiente. Defina $x = 0.\overline{9}$. Luego es fácil ver que $10x = 9.\overline{9}$. Pero si consideramos entonces $10x - x$ eso es lo mismo que 9 (pues los infinitos 9 en la parte decimal se restan unos con otros). Al final nos queda la igualdad $9x = 9$, por lo que $x = 1$.