El Número de Euler

Felipe Riquelme

En matemáticas se suele asociar a cada área un número interesante que aparenta ser evidencia de la belleza de esta ciencia. En geometría aparece el número π, el cual es la razón entre el perímetro y el diámetro de cualquier circunferencia. En el análisis complejo el número por excelencia se denota i, el cuál es una de las dos raíces de la ecuación $x^2 + 1 = 0$. En teoría de números aparece frecuentemente el número áureo φ, el cual también pareciera ser el favorito de la naturaleza cuando de proporciones se trata. El cálculo no se queda atrás de esta regla. El número que pareciera simplificar todo en esta área es el llamado número de Euler, e. Este número aparece generalmente cuando se intenta describir con un formalismo matemático a la naturaleza, de ello se encarga la física, y en este intento por describir lo que nos rodea aparecen las ecuaciones diferenciales.

La ecuación diferencial más básica (que no sea trivial en un sentido que prefiero no describir) podríamos pensar que es la siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = y.$$

Esta ecuación busca una función diferenciable que coincida con su derivada. Cualquier persona con un conocimiento básico para resolver este tipo de ecuaciones se daría cuenta que las soluciones a esta ecuación son todas de la forma

$$y(x) = Ae^x.$$

Daré un ejemplo del cómo esta ecuación aparece disfrazada en la naturaleza. Imaginemos que tenemos una cadena de largo arbitrario, y esta se encuentra amarrada en sus dos extremos, quedando suspendida en el aire. Sobre la cadena actúan distintas fuerzas. Entre ellas tenemos el Peso, que denotamos P, el cual consiste de la masa por la aceleración de gravedad (que supondremos constante), y tenemos también la tensión de la cadena. La tensión es una fuerza que solo actúa de manera horizontal en cada punto de esta, por lo que estas tensiones se anulan unas con otras salvo en los extremos. Denotamos entonces T_H la tensión horizontal en aquellos extremos. Como la cadena suspendida se encuentra en equilibrio, entonces podemos describir la posición de cada punto de ella por la ecuación siguiente

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{T_H}\left(1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{1/2}$$

cuya solución general está dada por

$$y(x) = a\cosh\left(\frac{x - x_0}{a}\right) + C,$$

donde $a = \frac{T_H}{P}$. Si suponemos que el punto mínimo de la cadena se encuentra en $(x_0, y_0) = (0, a)$ y que los extremos están a misma altura entonces la solución es

$$y(x) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}).$$

Por ahora solo he hablado de e de manera abstracta. Es un número pero no he dicho cual es precisamente. Entre la increíble cantidad de maneras que se conocen para expresar al número de Euler optaré por la más conocida.

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

La idea central de esta nota es dar las ideas generales del porqué el límite descrito arriba existe. Definamos entonces la sucesión (a_n) por

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Teorema 1. *Toda sucesión creciente (decreciente) y acotada superiormente (inferiormente) de números reales es convergente.*

Usaremos el teorema recién enunciado para mostrar que e está bien definido de tal manera. Partamos con el hecho de que a_n es acotada. De seguro que a_n es positiva. Lamentablemente esta sucesión resulta ser creciente, por lo que solo nos será útil mostrar la existencia de una cota superior.

Proposición 2. $a_n \leq a_{n+1}$

Démonstración: Para resolver esta desigualdad usaremos la conocida desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética. Esta nos dice que si $x_1, x_2, ..., x_n$ son reales positivos, entonces

$$\frac{x_1 + ... + x_n}{n} \geq (x_1 \cdot ... \cdot x_n)^{1/n}.$$

Si consideramos entonces $x_1 = 1, x_2 = ... = x_{n+1} = 1 + 1/n$, entonces

$$x_1 \cdot ... \cdot x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{y} \quad x_1 + ... + x_n + x_{n+1} = n + 2.$$

Aplicando directamente la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica entre aquellos $n + 1$ números reales, obtenemos lo buscado.

■

Para encontrar la cota superior usaremos el teorema del binomio de Newton, y una comparación sencilla entre $\frac{1}{k!}$ y $\frac{1}{2^k}$. El segundo término es mayor que el primero para $k \geq 4$.

Proposición 3. $a_n \leq 3$

Démonstración:

$$\begin{aligned}
a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n!}{(n-k)!n^k} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!} + \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{2^k} \\
&\leq \frac{8}{3} - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\
&= \frac{8}{3} - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}) + 2 = 2,791\overline{6} < 3.
\end{aligned}$$

■

Para finalizar solo quisiera señalar otro hecho importante. El número e es un irracional. Su expresión en números decimales es infinita, no periodica. Su valor aproximado es

$$e = 2,7182818284...$$