# GUÍA 1
# CÁLCULO 3 (IMA1301)
# FUNCIONES COMPUESTAS, IMPLÍCITAS E INVERSAS

Esta guía es un complemento a los ejercicios propuestos en el libro de Claudio Pita-Ruiz sobre los temas abordados en el capítulo 3.

(1) Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(t) = (at, bt)$, $a, b \in \mathbb{R}$, y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & , \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ si } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

(a) Calcule $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ en $(0, 0)$.
(b) Determine $h = g \circ f$.
(c) Calcule $h'(0)$ directamente y compare el resultado obtenido con el que se obtendría al usar la Regla de la cadena. ¿Qué ocurrió?

(2) Sabiendo que $x = e^u \cos v$, $v = e^y \sin x$, demostrar que

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v}{x}.$$

(3) Sea $f(u, v)$ una función que satisface $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0$, y sea $g(x, y) = f(e^u \cos v, e^u \sin v)$. Demuestre que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

(4) Sean $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ dos funciones tales que $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial v}$ y $\frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{\partial g}{\partial u}$. Sean además $F$ y $G$ dos funciones verificando $F(x, y) = G(u, v)$. Demostrar que

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial v^2} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)\left(\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right).$$

(5) Sean $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciables con $g(0) = (0, 0, 0)$, $Dg(0) = (1, 1, 1)^t$ y $Df(0, 0, 0) = (1, 1, 1)$. Pruebe que la función compuesta $f \circ g$ es creciente en $x = 0$. Determine la ecuación de la recta tangente a su gráfico en dicho punto.

(6) Sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ diferenciable en $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$, y sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ diferenciable en $\mathbf{q} = g(\mathbf{p})$. Suponga que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 5 \\ 1 & 9 & 8 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 10 \\ 10 & -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Sean $g_1, g_2, g_3, g_4, f_1, f_2$ las funciones coordenadas de $g$ y $f$ respectivamente, y $h_1, h_2$ aquellas de la función compuesta $h = f \circ g$.
(a) Escriba los vectores gradientes de las funciones $g_i$ en $\mathbf{p}$ y de $f_j$ en $\mathbf{q}$.
(b) Determine la ecuación del plano tangente a la superficie de nivel de $h_1$ que pasa por $\mathbf{p}$.
(c) Calcule la derivada direccional de $h_2$ en $\mathbf{p}$ en la dirección del vector $(1, 0, 2)$.

(7) Sean $G(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y $F(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r)$. Calcule la matriz diferencial $d(G \circ F)$ en el punto $(1, 0)$.

(8) Considere el sistema

$$\begin{cases} xy + e^{ux} + 2v = 3 \\ x + uy - v = -1. \end{cases}$$

(a) Compruebe que existe una vecindad de $p = (0,1,0,1)$ y funciones $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ definidas en tal vecindad, tales que $u(0,1) = 0$ y $v(0,1) = 1$ que resuelven el sistema.

(b) Calcule $\frac{\partial u}{\partial x}(0,1)$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(0,1)$.

(9) La variable $v$ se expresa como función de la variable $t$ por medio del sistema

$$\begin{cases} e^{2x-y} = v \\ y + xe^{xy} = t^3 + 5t \\ x + y^3 - y = t^3 - t. \end{cases}$$

Calcule $\frac{dv}{dt}$ cuando $x = y = 0$.

(10) Considere el sistema

$$\begin{cases} 3x + y - u + 2v = 2 \\ x - 2y + u^2 + 2v^2 = 9. \end{cases}$$

(a) Comprobar que existe una vecindad de $(x_0, y_0) = (1,-1)$, y funciones $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$, tales que $u(1,-1) = 2$ y $v(1,-1) = 1$ que resuelven el sistema.

(b) Para la función $u$ de la parte anterior, calcular $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

(11) Considere el sistema

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - u^5 - w^5 = 0 \\ x + y - u - w^2 = 0 \\ x^2 + y^2 + u^3 - v^2 - w = 0. \end{cases}$$

(a) Comprobar que existe una vecindad de $(x_0, y_0) = (1,1)$ de modo que ella define a $u, v, w$ como funciones dependiendo de $(x,y)$ que cumplen con $u(1,1) = 1$, $v(1,1) = \sqrt{2}$ y $w(1,1) = 1$.

(b) Calcular $\frac{\partial u}{\partial x}(1,1)$ y $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(1,1)$.

(12) Demostrar que si $z = f(x,y)$ es la función implícita definida por la ecuación

$$3y - 3xz - z^4 = 0,$$

entonces

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$$

(13) Sea $F(x,y) = (x + y, xy)$. Demuestre que $F$ es invertible en una vecindad de $(2,1)$ y calcule $dF^{-1}(3,2)$ sin determinar $F^{-1}$.

(14) Sea $F(x,y) = (u,v)$ una función de clase $C^1$ tal que $\det(dF) \neq 0$. ¿Qué condición deben cumplir las derivadas parciales de $u$ y $v$ respecto a $x$ e $y$, para que se cumpla

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{\frac{\partial u}{\partial x}}?$$