Sucesiones y Límites

Felipe Riquelme

Una de las primeras nociones que aprendemos en los cursos de cálculo es la convergencia. El problema que esta conlleva es precisamente su formalismo matemático, a pesar de que intuitivamente puede parecer lo más simple del mundo. En esta nota el objetivo será explicar de la forma más sencilla posible la convergencia de sucesiones de números reales.

Una sucesión de números reales no es nada más que un conjunto infinito numerable de números reales, ordenados por índices representados por números naturales. Como a cada número natural se le asocia un real (indexado por el natural), debemos pensar formalmente en una sucesión como una función definida sobre los números naturales.

Definición 1. *Una* sucesión *de números reales es una función* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *que a cada natural* n *le asocia un real* $a_n := a(n)$.

En general la definición usando una función puede complicar al lector. Por esto mismo nos referiremos a una sucesión como un conjunto de la forma $\{a_n\}_n$, donde n representa el n-ésimo elemento del conjunto. Por ejemplo, el conjunto

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...\right\}$$

es representado por $\{\frac{1}{n}\}_n$.

Para hablar de convergencia debemos necesariamente definir el concepto de *límite*. Pongamonos primero en la siguiente situación. Imaginemos a dos personas, una con nombre "L" y otra con nombre "a". ¿Cómo puedo pensar en el hecho que "a" se acerque a "L"? Lo primero que uno podría pensar es que si "L" tiene cierto campo de visión, entonces "a" debe estar en ese campo de visión a partir de cierto momento, y en todo momento después de ese. Pero no basta solo con esto. Si el campo de visión disminuye entonces a partir de (otro) cierto momento debe suceder lo mismo; "a" debe estar dentro de ese campo de visión de "L", y permanecer en ese campo de visión. Para definir el campo de visión voy a usar la letra $\varepsilon > 0$. Decir que algo está en un campo de visión ε de "L" es lo mismo que decir que ese algo está a distancia menor que ε de "L". Para hablar de los momentos en que esto sucede, usaré sencillamente el tiempo. Definiré por a_n la posición de "a" a tiempo n. Resumiendo... "a" se acerca a "L" si para todo campo de visión $\varepsilon > 0$ existe un instante temporal $N \in \mathbb{N}$ tal que la distancia entre "a" y "L" es menor que ε en todo momento n mayor o igual a N. Dicho más concretamente, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Esta es justamente la definición formal del límite...

Definición 2. *Una sucesión* $\{a_n\}_n$ *converge a* L *si y solamente si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$

En tal caso escribimos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Lo importante de esta definición es que no hace referencia al cómo una sucesión se acerca a su límite (de existir). Y la verdad es que no es relevante. Poco interesa si la sucesión se acerca a cierto número en zig-zag, de manera monótona (creciente o decreciente), muy rápidamente o muy lentamente (sea lo que sea que esto último signifique). Lo único importante es que se esté suficientemente cerca a partir de cierto momento, y el "suficientemente cerca" está dado por el parámetro ε.

Por ejemplo, consideremos la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$. Para valores muy grandes de n la fracción es muy pequeña. Es fácil ver entonces que esta sucesión converge a 0. Además, el hecho que $n < n+1$ implique $a_{n+1} < a_n$ nos dice que la convergencia es de manera monótona. No existe en este caso tal cosa como un zig-zag. En cambio, si $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, entonces el resultado es algo parecido, solo que a_n varía entre valores positivos y negativos. Su límite es también 0 solo que la convergencia no es monótona. Para ver que no toda sucesión es convergente notemos que la sucesión $a_n = (-1)^n$ toma valores 1 o -1, dependiendo si n es par o impar. Esto quiere decir que la sucesión no se acerca a ningún único valor a partir de un momento. Por lo que en este caso, el límite no existe.

Definición 3. *Una* serie *real es una suma infinita de números reales. Más precisamente, si $\{a_n\}_n$ es una sucesión de números reales entonces la serie asociada a a_n es la suma*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Hablando rigurosamente, una serie no tiene porqué estar bien definida. No hay ningún motivo ni razón por la cual tal suma infinita deba tomar un valor. Para ver si tal valor existe, nuevamente haremos uso de los límites.

Definamos b_n como la sucesión dada por la suma de los primeros n términos de una sucesión $\{a_n\}$. A saber,

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} a_n.$$

Definición 4. *Diremos que una serie es convergente si el límite de la sucesión b_n existe. En caso contrario diremos que la serie es divergente.*

Muchos ejercicios existen sobre el cálculo exacto de series numéricas, muchos más sobre el discernimiento de la convergencia. Es posible verificar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ no converge y que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es convergente, siendo su valor exacto 1. Una serie en particular trajo muchos problemas para los matemáticos del siglo XVIII. Era sabido que la serie de los inversos al cuadrado, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, es convergente, lo difícil fue encontrar su valor exacto. En el año 1735 Leonhard Euler logró llegar a la solución... la serie tiene por valor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$