PAUTA DE PRUEBA DE CÁTEDRA 1
ECUACIONES DIFERENCIALES (IMA1403).

Problema 1. Estudie existencia, unicidad e intervalos maximales de solución para los PVI

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} x' &= \min\{|t|, x\}, \\ x(0) &= 1. \end{cases} \qquad \text{(b)} \quad \begin{cases} x' &= 3tx^{1/3}, \\ x(2) &= 1. \end{cases}$$

Solución (a). Notemos que si $f(t,x) = \min\{|t|, x\}$, entonces

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| \leqslant x_1, x_2, \\ |x_1 - |t|| & \text{si } x_1 < |t| \leqslant x_2, \\ ||t| - x_2| & \text{si } x_2 < |t| \leqslant x_1, \\ |x_1 - x_2| & \text{si } x_1, x_2 < |t|. \end{cases}$$

Pero si $x_1 < |t| \leqslant x_2$, entonces $|t| - x_1 \leqslant x_2 - x_1$. Por otro lado, si $x_2 < |t| \leqslant x_1$, entonces $|t| - x_2 \leqslant x_1 - x_2$. De esta forma, siempre se tiene

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leqslant |x_1 - x_2|,$$

por lo que la función es 1-Lipschitz en la variable x. Siendo esto verdadero en todo compacto $[-T,T] \subset \mathbb{R}$, por teorema de Picard-Lindelöf se tiene solución única $x(t)$ al PVI en $[-T,T]$. Como $[-T,T]$ es arbitrario, el intervalo máximo de (única) solución es $\mathbb{R}$.

Solución (b). La función $f(t,x) = 3tx^{1/3}$ verifica $\frac{d}{dx}f(t,x) = tx^{-2/3}$. Es decir, la derivada $\frac{d}{dx}f(t,x)$ es acotada uniformemente en todo subconjunto compacto de $(0,\infty)$. En particular, en todo subconjunto compacto de $(0,\infty)$ hay única solución al PVI.

Explícitamente, integrando $\frac{1}{3}x^{-1/3}x' = t$ en ambos lados (respecto a t), nos queda

$$x(t) = \pm\sqrt{(t^2 + c)^3},$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es una constante arbitraria. Resolviendo el PVI nos queda que $c = -3$, por lo que esta solución está bien definida en $t \geqslant \sqrt{3}$. Como $y(t) = 0$ es solución de la ecuación $y' = f(t,y)$, necesariamente tenemos que la única solución en $(0,\infty)$ es de la forma

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < t \leqslant \sqrt{3}. \\ \sqrt{(t^2-3)^3} & \text{si } t \geqslant \sqrt{3}. \end{cases}$$

La solución $x(t)$ puede extenderse (no únicamente) a todo $\mathbb{R}$.

Problema 2. Considere la ecuación diferencial en coordenadas polares

$$\begin{cases} r' &= -r, \\ \theta' &= 2. \end{cases}$$

Demuestre que toda solución tiene intervalo maximal de solución $I = \mathbb{R}$. Esboce un retrato de fase.

Solución. Sea $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$. Entonces

$$\begin{aligned} x' &= r'\cos(\theta) - r\sin(\theta)\theta' \\ &= -r\cos(\theta) - 2r\sin(\theta) \\ &= -x - 2y, \end{aligned}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} y' &= r'\sin(\theta) + r\cos(\theta)\theta' \\ &= -r\sin(\theta) + 2r\cos(\theta) \\ &= 2x - y. \end{aligned}$$

De esta forma, la ecuación es equivalente a la ecuación lineal $(x, y)' = (-x-2y, 2x-y) =: f(x, y)$. Si A es la matriz de 2x2 definida por

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

entonces $\|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)\| \leqslant \|A\|\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|$, por lo que f es $\|A\|$-Lipschitz en todo $\mathbb{R}^2$. El teorema de Picard-Lindelöf nos dice entonces que el intervalo máximo de solución es $\mathbb{R}$.

Otra manera de resolver el problema es calculando explícitamente las soluciones. En efecto, integrando respecto a t nos queda $r(t) = c_1 e^{-t}$ y $\theta = 2t + c_2$, con $c_1 \geqslant 0$ y $c_2 \in \mathbb{R}$, las cuales están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.

El retrato de fase consiste en espirales que convergen al origen del plano conforme $t \to +\infty$.

Problema 3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función Lipschitz, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función de clase C^1 y $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ función definida por

$$h(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Demuestre que el PVI

$$\begin{cases} (x, y, z)' &= (f(y), g(x)y^2, h(x, y)z^3), \\ (x(0), y(0), z(0)) &= (x_0, y_0, z_0), \end{cases}$$

tiene solución única en algún intervalo $I \subset \mathbb{R}$ tal que $0 \in I$. ¿Qué se puede decir respecto a la dependencia en las condiciones iniciales?.

Solución. Por hipótesis, las funciones f y g son localmente Lipschitz en $\mathbb{R}$. Usando desigualdad triangular de manera adecuada es posible ver que la función $F(x, y) = (f(y), g(x)y^2)$ es localmente Lipschitz en $\mathbb{R}^2$. Entonces el PVI

$$\begin{cases} (x, y)' &= F(x, y), \\ (x(0), y(0)) &= (x_0, y_0), \end{cases}$$

tiene única solución $(x(t), y(t))$ en alguna vecindad de $0 \in \mathbb{R}$ gracias al Teorema de Picard-Lindelöf. Como la función h es continua y la función $G(t, z) = h(x(t), y(t))z^3$ es localmente Lipschitz en la variable z, el PVI

$$\begin{cases} z' &= G(t, z), \\ z(0) &= z_0, \end{cases}$$

tiene solución única en torno a $0 \in \mathbb{R}$. Dicha solución es solución al PVI original.

Como las funciones F y G son localmente Lipschitz, se tiene dependencia (al menos) Lipschitz por teorema visto en clases.

Problema 4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(\sqrt{x^2 + y^2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \frac{xy^2}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ (0, 0) & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Determine si el PVI

$$\begin{cases} (x,y)' = f(x,y) \\ (x(0),y(0)) = (0,0). \end{cases}$$

tiene solución.

Solución. Las coordenadas de $f(x,y)$ son continuas en todo su dominio por lo que f es continua. El teorema de Peano nos asegura entonces la existencia de soluciones para el PVI.

Problema 5. Sean $f : \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ función localmente Lipschitz y $\mathbf{x} : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ solución de la ecuación diferencial

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}),$$

con (a,b) intervalo maximal. Asuma que existen puntos $p, q \in \mathscr{U}$ tales que

$$\lim_{t \to a^+} \mathbf{x}(t) = p, \quad \text{y} \quad \lim_{t \to b^-} \mathbf{x}(t) = q.$$

Demuestre que $(a,b) = \mathbb{R}$.

Solución. Como los puntos p y q están contenidos en $\mathscr{U}$, la solución $x(t)$ permanece en un compacto de $\mathscr{U}$ para todo $t \in (a,b)$, lo que implica $(a,b) = \mathbb{R}$ por teorema visto en clases.