PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE VALPARAISO

IMA Instituto de Matemáticas PUCV

PRUEBA DE CÁTEDRA 1 (PAUTA)
CÁLCULO 3 (IMA1301).

Problema 1. Estudie la continuidad de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} & , \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Solución. De ser f continua en el origen, esta debe satisfacer necesariamente

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Pero si nos acercamos al origen por medio de la recta $y = x$, con $x \neq 0$, nos queda

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2x^2}{x^4+x^4} = \frac{1}{2},$$

por lo que f no es continua en el origen. En $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ se tiene continuidad por álgebra de funciones continuas y dado que $x^4 + y^4 > 0$ en tal dominio.

Problema 2. Demuestre por definición que la función $f(x,y) = xy^2$ es diferenciable en $(1,0)$.

Solución. Calculando las derivadas parciales, nos queda

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,0) - f(1,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} \\ &= 0, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) &= \lim_{k\to 0} \frac{f(1,k) - f(1,0)}{k} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{k^2-0}{k} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Recordemos que el resto $r(h,k)$ resultante al comparar f con una función lineal, es igual a

$$\begin{aligned} r(h,k) &= f(1+h, 0+k) - f(1,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)k \\ &= (1+h)k^2 - 0 - 0h - 0k = (1+h)k^2. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(1+h)k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} (1+h)k\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}. \end{aligned}$$

Pero sabemos que $|k/\sqrt{h^2+k^2}| \leqslant 1$ para todo $h, k \neq 0$, mientras que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} (1+h)k = 0.$$

Finalmente, el teorema del Sandwich implica que el límite anterior es igual a cero, por lo que la función $f(x,y) = xy^2$ es diferenciable en $(1,0)$.

Problema 3. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (justifique las verdaderas referenciando teoremas y las falsas mediante ejemplos).

(a) Una función continua es diferenciable.
(b) Una función con derivadas parciales continuas es diferenciable.
(c) El vector gradiente en un punto es perpendicular a la curva de nivel determinada por dicho punto.
(d) Si las derivadas parciales de segundo orden son continuas, entonces las derivadas mixtas de segundo orden coinciden.

Solución. La afirmación (a) es falsa pues la función $f(x,y) = |x|$ es continua pero no diferenciable. La afirmación (b) es verdadera por teorema visto y demostrado en clases. La afirmación (c) es verdadera por teorema visto y demostrado en clases. La afirmación (d) es verdadera por Teorema de Schwarz (enunciado en clases).

Problema 4. Determine la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ en el punto $\mathbf{p} = (0,0)$.

Solución. Observemos primero que $f(0,0) = 0$. Las derivadas parciales son

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{-(x^2+y^2)} + (x^2+y^2)(-2x)e^{-(x^2+y^2)}$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^{-(x^2+y^2)} + (x^2+y^2)(-2y)e^{-(x^2+y^2)}.$$

En particular, en el punto $\mathbf{p}$ se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}) = 0, \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}) = 0.$$

De esta forma, la normal al plano tangente corresponde al vector $(0,0,1)$. Como buscamos que el plano pase por el punto $(0,0,f(0,0))$, nos queda

$$\prod = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (0,0,1)\cdot(x-0, y-0, z-0) = 0\},$$

o de manera equivalente

$$\prod = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}.$$

El plano tangente a la gráfica de f en el punto $\mathbf{p}$ es entonces $z = 0$ (el plano XY).