Pontificia Universidad Católica de Chile

Facultad de Matemáticas

Problemas Resueltos ⋆ MAT1630 – Cálculo III

Sebastián Urrutia Quiroga

sgurruti@uc.cl

http://web.ing.puc.cl/~sgurruti/

Versión 1.0

26 de octubre de 2013

Índice

1. Cálculo Diferencial de funciones escalares de varias variables

1.1. Nociones Topológicas en $\mathbb{R}^n$

(1) *a*) Demuestre que el conjunto vacío $\emptyset$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$. (**Sugerencia:** si el vacío no fuese abierto...)

b) Demuestre que $\mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$.

Solución:

Antes que todo, algunas definiciones:

Definición (punto interior). Se dice x_0 es *punto interior de* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ si existe un $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset U$.

Definición (conjunto abierto). Se dice que un conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es *abierto* si todos sus puntos son interiores.

Definición (punto exterior). Se dice x_0 es *punto exterior de* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ si existe un $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset U^c$.

Definición (punto frontera). Se dice x_0 es *punto frontera de* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ si $\forall r > 0$, $B_r(x_0)$ posee puntos en U y en U^c. Al conjunto de puntos frontera se les llama **frontera**.

Definición (conjunto cerrado). Se dice que un conjunto $V \subseteq \mathbb{R}^n$ es *cerrado* si su complemento es abierto, si contiene a su frontera o si cada sucesión convergente de términos en V converge a un valor dentro del conjunto V.

a) Un conjunto A es no abierto si existe un punto en el conjunto que no es punto interior de A. El vacío no satisface esta condición, pues no contiene punto alguno que no sea interior (de hecho, no posee punto alguno). Luego, el vacío $\emptyset$ es abierto.

b) Un conjunto A es cerrado contiene los límites de toda sucesión convergente con términos en $a_n \in A$. El vacío cumple dicha propiedad, pues contiene a todo el conjunto de las sucesiones de términos en el vacío, que es vacío. Luego, $\emptyset$ es cerrado; por tanto, $\emptyset^c = \mathbb{R}^n$ es abierto.

■

(2) Determine, en cada caso, si el conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ es abierto, cerrado o no abierto ni cerrado, justificando su respuesta.

a) $A = \{(x, y) : |x| + |y| < 1\}$

b) $A = \{(x, y) : y = x\}$

c) $A = \{(x,y) : x^2 + y^2 \geq 0\}$

d) $A = \{(x,y) : 2 < x < 4,\ 2 < y \leq 5\}$

e) $A = \{(x,y) : e^{xy} < 0\}$

Solución:

a) Abierto.

b) Cerrado.

c) Abierto y cerrado (es todo el espacio).

d) Ni abierto ni cerrado.

e) Abierto y cerrado (es el conjunto vacío).

■

1.2. Límite de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$

(1) Calcule los siguientes límites:

a) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sin(x)\sin(y)}$

b) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

c) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(2xy^2)}{2(x^2+y^4)^2}$

d) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

e) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

f) $\displaystyle \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2y+y^2z}{x^2+2y^2+3z^2}$

g) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3\sin(x)}{x^4+y^2}$

h) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$

Solución:

a) Aplicando directamente las propiedades del producto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sin(x)\sin(y)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy}\frac{x}{\sin(x)}\frac{y}{\sin(y)} = 1$$

b) Dado que el grado del denominador es menor al del numerador, es probable que el límite sea nulo. Usemos, como trayectoria de acercamiento al origen, la familia de curvas $y = mx^k$. Así,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x^2x^{2k}}{x^2+m^2x^{2k}} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x^{2k}}{1+m^2x^{2k-2}} = 0$$

por lo menos, para $k > 2$. Ahora, probaremos que el límite es cero por definición: sea $\varepsilon > 0$ y $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Así,

$$\|(x,y)-(0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \sqrt{\varepsilon} \quad \longrightarrow \quad x^2+y^2 < \varepsilon$$

Por otra parte, $x^2, y^2 \leq x^2+y^2$, y con ello:

$$|f(x,y)-0| = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{(x^2+y^2)(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = x^2+y^2 \leq \varepsilon \quad \longrightarrow \quad |f(x,y)-0| \leq \varepsilon$$

que es lo que se buscaba probar.

c) Sea

$$f(x,y) = \frac{1-\cos(2xy^2)}{2(x^2+y^4)^2} = \frac{2\sin^2(xy^2)}{2(x^2+y^4)^2} = \underbrace{\frac{\sin^2(xy^2)}{(xy^2)^2}}_{\phi(x,y)} \cdot \underbrace{\frac{(xy^2)^2}{(x^2+y^4)^2}}_{\psi(x,y)}$$

Notamos que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \phi(x,y) = 1$$

Para la segunda función, verificamos las curvas $y = x,\ x = y^2$:

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \psi(x, y=x) &= \lim_{x\to 0} \frac{x^6}{(x^2+x^4)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^6}{x^4+2x^6+x^8} = 0 \\
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \psi(x=y^2, y) &= \lim_{y\to 0} \frac{y^8}{(2y^4)^2} = \lim_{y\to 0} \frac{y^8}{4y^8} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Como ambos límites son distintos, el límite de $f(x,y)$ no existe.

d) Consideremos el cambio a coordenadas polares, de la forma:

$$x = r\cos\theta \qquad \wedge \qquad y = r\sin\theta$$

Es claro que $(x,y)\to(0,0) \equiv r\to 0, \forall\theta$. Reescribiendo el límite,

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \lim_{r\to 0} \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \cos 2\theta$$

Como este último valor depende del ángulo, concluimos que el límite no existe.

e) Nuevamente empleamos el cambio a polares. Así,

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{r^3} = \lim_{r\to 0} r\ \cos^2\theta\sin^2\theta = 0$$

pues tenemos un término acotado, multiplicado por otro que converge a cero.

f) Tenemos que:

$$0 \leq \left| \frac{x^2y + y^2z}{x^2 + 2y^2 + 3z^2} \right| \leq \frac{x^2|y| + y^2|z|}{x^2 + 2y^2 + 3z^2} \leq \frac{x^2|y|}{x^2} + \frac{y^2|z|}{2y^2} = |y| + \frac{|z|}{2}$$

y, como está última expresión tiende a cero, el Teorema del Sandwich garantiza que:

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{0}} \left| \frac{x^2y + y^2z}{x^2 + 2y^2 + 3z^2} \right| = 0 \quad \longrightarrow \quad \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2y + y^2z}{x^2 + 2y^2 + 3z^2} = 0$$

g) Aplicamos valor absoluto:

$$0 \leq \left| \frac{y^3 \sin(x)}{x^4 + y^2} \right| = \frac{|y^3||\sin(x)|}{x^4 + y^2} \leq \frac{|y^3|}{x^4 + y^2} \leq \frac{|y^3|}{y^2} \leq |y|$$

Como $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$, se cumple que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3 \sin(x)}{x^4 + y^2} = 0$$

h) Como el grado del numerador es superior al denominador, creemos que el límite es nulo. Lo demostraremos por demostración: requerimos que

$$\|(x,y) - (0,0)\| < \delta \quad \longrightarrow \quad \left| \frac{x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

Ahora,

$$\left| \frac{x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \frac{x^2|y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$$

Así, basta tomar $\varepsilon = \delta$ para completar la demostración.

$\blacksquare$

1.3. Continuidad de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$

(1) Estudie la continuidad, en el origen, de las siguientes funciones:

a) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^6 + x^4y^6 + y^2} & \text{, si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

b) $$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2y^6)}{x^4 + y^6} & \text{, si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$c)$ $h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^4+y^4} & , \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Solución:

$a)$ f es continua en $(0,0)$ si y solo si $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$. Mediante límites iterados, tenemos que:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

mientras que si usamos la curva $y = x^3$, obtenemos:

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^3) = \lim_{x\to 0}\frac{x^6}{x^6+x^{22}+x^6} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2+x^{16}} = \frac{1}{2}$$

De esta forma, el límite en cuestión no existe; por tanto, $f(x,y)$ es discontinua en el origen.

$b)$ Notemos que:

$$\left|\frac{\sin(x^2y^6)}{x^4+y^6}\right| = \left|\frac{\sin(x^2y^6)}{x^2y^6}\right|\left|\frac{x^2y^6}{x^4+y^6}\right| = \left|\frac{\sin(u)}{u}\right|\left|\frac{x^2y^6}{x^4+y^6}\right|$$

con $u = x^2y^6$. Es claro que $(x,y)\to(0,0) \equiv u\to 0$. Por otro lado,

$$0 \le \left|\frac{\sin(u)}{u}\right|\left|\frac{x^2y^6}{x^4+y^6}\right| \le \left|\frac{\sin(u)}{u}\right|\left|\frac{x^2y^6}{y^6}\right| = \left|\frac{\sin(u)}{u}\right| x^2$$

Como $\displaystyle\lim_{u\to 0}\frac{\sin(u)}{u} = 1$, entonces:

$$0 \le \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{\sin(x^2y^6)}{x^4+y^6}\right| \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 = 0$$

de lo cual se deduce que el límite es cero. Por tanto, la función es continua.

$c)$ En este caso, reemplacemos por coordenadas polares:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = \lim_{r\to 0} r\,\underbrace{\frac{\cos^3\theta\sin^2\theta}{\cos^4\theta+\sin^4\theta}}_{\phi(\theta)}$$

Si $\phi(\theta)$ fuese acotada, el límite sería nulo y la función h sería continua. Es trivial probar que el numerador es acotado –pues es el producto de dos funciones continuas acotadas–, pero el denominador debe ser analizado con cuidado.

$$\left.\begin{array}{l} -1 \le \sin\theta \le 1 \;\;\to\;\; 0 \le \sin^4\theta \le 1 \\ -1 \le \cos\theta \le 1 \;\;\to\;\; 0 \le \cos^4\theta \le 1 \end{array}\right\} \longrightarrow \quad 0 \le \cos^4\theta + \sin^4\theta \le 2$$

Ahora, debemos probar que no existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que el denominador se anule:

$$\begin{aligned}
\cos^4\theta + \sin^4\theta = 0 \quad &\leftrightarrow \quad \cos^4\theta + 2\sin^2\theta\cos^2\theta + \sin^4\theta = 2\sin^2\theta\cos^2\theta \\
&\leftrightarrow \quad \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)^2 = 2\sin^2\theta\cos^2\theta \\
&\leftrightarrow \quad \frac{1}{2} = \sin^2\theta\cos^2\theta \\
&\leftrightarrow \quad \sqrt{2} = \sin 2\theta
\end{aligned}$$

lo que es una contradicción. Así, existe un $M \in \mathbb{R}$ tal que:

$$0 < \cos^4\theta + \sin^4\theta \leq 2 \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\cos^4\theta + \sin^4\theta} \leq M < \infty$$

Por lo tanto, $\phi(\theta)$ es acotada y la función $h(x, y)$ es continua en el origen.

■

(2) Determine el valor de las constantes α, β de modo tal que f sea continua en cada caso:

a) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2+y^4)}{1-\cos\left(\sqrt{x^2+y^4}\right)} & , \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & , \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

b) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y^4}{(x^4+y^2)^3} & , \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ \beta & , \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solución:

a) Notemos que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^4)}{x^2+y^4} \cdot \frac{x^2+y^4}{1-\cos\left(\sqrt{x^2+y^4}\right)}$$

Analicemos los límites por separado: para el primero, sea $u = x^2 + y^4$ tal que $(x, y) \to (0, 0) \equiv u \to 0$; así,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^4)}{x^2+y^4} = \lim_{u\to0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

Por otra parte, sea $\gamma = \sqrt{x^2 + y^4}$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^4}{1 - \cos\left(\sqrt{x^2 + y^4}\right)} = \lim_{\gamma\to 0} \frac{\gamma^2}{1 + \cos\gamma} = 2$$

Finalmente, como ambos límites existen de manera independiente, se cumple que:

$$\alpha = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1 \cdot 2 = 2$$

$b)$ Dado que el grado del denominador es superior al del numerador –en el coeficiente x–, pensamos que este límite no existe. Para probarlo, usemos las curvas $x = t^a, \; y = t^b$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{t^{4(a+b)}}{(t^{4a} + t^{2b})^3} = \lim_{t\to 0} \frac{t^{4(a+b)}}{t^{6b}(t^{4a-2b} + 1)^3}$$

Si $4(a+b) = 6b \to b = 2a$, entonces

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^{4(a+b)}}{t^{6b}(t^{4a-2b} + 1)^3} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{(1+1)^3} = \frac{1}{8}$$

Pero si tomamos límites iterados,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \left(\lim_{y\to 0} f(x,y) \right) = 0$$

Como el límite no existe, entonces

$$\nexists\, \beta \in \mathbb{R} \text{ tal que } f(x,y) \text{ sea continua}$$

■

1.4. Diferenciabilidad de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$

(1) Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^k}{x^2 + y^2} & , \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\[2ex] 0 & , \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$a)$ Determine los valores de k de modo tal que la función sea continua en el origen.

$b)$ Determine los valores de k de modo tal que la función sea diferenciable en el origen.

Solución:

a) Tomando coordenadas polares:

$$x = r\cos\theta \qquad \wedge \qquad y = r\sin\theta$$

Así,

$$\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \lim_{r\to 0} \frac{r^{k+1}\cos\theta\sin^k\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r^{k-1}\cos\theta\sin^k\theta$$

por lo que, para $k-1>0$, la función tiende a 0. Si $k<1$, la función no es acotada en el origen y para $k=1$, el límite depende de θ. Por tanto, la función es continua si y solo si

$$k > 1$$

b) Si la función es diferenciable, necesariamente debe ser continua; de esta forma, $k>1$. Ahora,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0 \qquad \wedge \qquad \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0$$

y ambas derivadas parciales existen y son iguales en el origen. Finalmente, se debe cumplir que:

$$\lim_{(h,t)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+t)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(h,t)}{\sqrt{h^2+t^2}} = \lim_{(h,t)\to(0,0)} \frac{\dfrac{ht^k}{h^2+t^2}}{\sqrt{h^2+t^2}} = 0$$

Haciendo el cambio a polares,

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^{k+1}\cos\theta\sin^k\theta}{r^3} = \lim_{r\to 0} r^{k-2}\cos\theta\sin^k\theta$$

vemos que el límite converge a 0 si y solo si

$$k > 2$$

■

(2) Sea $w = f(x,y,z) = 2xy^2 + x^2z$. Demostrar que es diferenciable.

Solución:

Notemos que:

$$w_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(2xy^2 + x^2z\right) = 2y^2 + 2xz$$

$$w_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(2xy^2 + x^2z\right) = 4xy$$

$$w_z = \frac{\partial}{\partial z}\left(2xy^2 + x^2z\right) = x^2$$

Como todas las derivadas parciales son continuas (pues son polinomios), entonces la función w es diferenciable. ■

(3) *a*) Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & , \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & , \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Pruebe que, en el punto $(0,0)$, f posee derivada direccional en todas las direcciones posibles del plano. Determine la dirección de mayor derivada direccional.

b) Demuestre, por definición, que $g(x,y) = \sin(x+y)$ es diferenciable en $(0,0)$.

Solución:

a) Sea el vector unitario $\hat{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$. Entonces:

$$D_{\hat{u}}f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{t^3\cos^2\theta\sin\theta}{t^3} = \cos^2\theta\sin\theta$$

Por lo tanto, la derivada direccional existe en toda dirección, y vale $g(\theta) = \cos^2\theta\sin\theta$. Para maximizar la función g, derivamos e igualamos a cero –pues en los extremos g es nula– obteniendo:

$$g'(\theta) = 0 \ \leftrightarrow \ \theta = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

b) Notar que:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = \cos(x+y)$$

y por tanto ambas derivadas valen 1 en el origen. Entonces, se debe cumplir que:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sin(h+k) - \sin(0+0) - h - k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sin(h+k) - (h+k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Recordando que $\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + \mathcal{O}(t^3)$,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sin(h+k) - (h+k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{-\frac{(h+k)^3}{6} + \mathcal{O}(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

■

(4) *a*) Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal dada. Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial \hat{u}}$ para $f(\vec{x}) = \vec{x} \cdot T(\vec{x})$.

b) Considere las superficies en $\mathbb{R}^3$ dadas por las ecuaciones

$$y = f(x) \ , \quad z^2 + 2xz + y = 0$$

Determine la función $f(x)$, si se sabe que ambas superficies tienen el mismo plano tangente en todo punto donde se intersectan.

c) Sea $f(x,y)$ diferenciable. La recta tangente a la curva de nivel de f que pasa por (x_0,y_0) tiene pendiente 2. Determine el valor de $f_x(x_0,y_0)$ sabiendo que $f_y(x_0,y_0) > 0$ y que la derivada direccional máxima en dicho punto es igual a 4.

Solución:

a) Por la linealidad del operador,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(\vec{x}) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{x}+t\hat{u}) - f(\vec{x})}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\vec{x}\cdot T(\vec{x}) + t\Big(\hat{u}\cdot T(\vec{x}) + \vec{x}\cdot T(\hat{u})\Big) + t^2\hat{u}\cdot T(\hat{u}) - \vec{x}\cdot T(\vec{x})}{t} \\
&= \hat{u}\cdot T(\vec{x}) + \vec{x}\cdot T(\hat{u})
\end{aligned}$$

b) En los puntos de intersección se debe satisfacer que $z^2+2xz+f(x)=0$, y además los respectivos vectores normales deben ser paralelos:

$$(-f'(x),1,0) \parallel (2z,1,2x+2z)$$

Así, $x+z=0$ y $f'(x)=2x$, con lo cual $f(x)=x^2+c$. Entonces, la intersección da $(x+z)^2+c=0 \to c=0$. Así,

$$f(x) = x^2$$

c) Sean $a = f_x(x_0,y_0)$ y $b = f_y(x_0,y_0)$. Así, se pide hallar el valor de a, sabiendo que $b>0$. Como el vector $\nabla f(x_0,y_0) = (a,b)$ es perpendicular a la curva de nivel de f en (x_0,y_0) y por tanto su pendiente debe ser $-\dfrac{1}{2}$:

$$\frac{b}{a} = -\frac{1}{2} \qquad \longrightarrow \qquad a+2b=0$$

Por otro lado, se tiene que la derivada direccional máxima de f en (x_0,y_0) es:

$$\begin{aligned}
\|\nabla f(x_0,y_0)\| = \sqrt{a^2+b^2} = 4 \qquad &\longrightarrow \qquad a^2+b^2=16 \\
&\longrightarrow \qquad (-2b)^2+b^2=16 \\
&\longrightarrow \qquad b=\frac{4}{\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

ya que por hipótesis, $b>0$. Como $a=-2b$, obtenemos:

$$f_x(x_0,y_0) = -\frac{8}{\sqrt{5}}$$

$\blacksquare$

(5) Sea

$$\phi(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x(1-\cos y)\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^4} & , \text{ si } (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & , \text{ si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Calcule la derivaba direccional de ϕ, en el origen, para una dirección cualquiera.

b) ¿Es diferenciable en el origen? Justifique su respuesta.

Solución:

a) Sea $\hat{v}=(\cos\theta,\sin\theta)$ el vector unitario en una dirección arbitraria. Por definición, la derivada direccional de ϕ en $(0,0)$ es, para $\sin\theta,\cos\theta\neq 0$,

$$\begin{aligned}D_{\hat{v}}\phi(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{\phi(h\cos\theta,h\sin\theta)-\overbrace{\phi(0,0)}^{0}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h\cos\theta(1-\cos(h\sin\theta))|h|}{h^3(\cos^2\theta+h^2\sin^4\theta)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta+h^2\sin^4\theta}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos(h\sin\theta)}{h\sin\theta}\frac{|h|\sin\theta}{h}\end{aligned}$$

El primer límite es $1/\cos\theta$ –asumiendo que $\cos\theta\neq 0$–; en cuanto al segundo, si $y=h\sin\theta$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos(h\sin\theta)}{h\sin\theta}=\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{y}=0$$

por la regla de L'Hôpital y, como $\dfrac{|h|\sin\theta}{h}$ es acotado, llegamos a que:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos(h\sin\theta)}{h\sin\theta}\frac{|h|\sin\theta}{h}=0$$

Así, $D_{\hat{v}}\phi(0,0)=0$ para todo $\theta\neq 0,\pi/2,\pi,3\pi/2$, ya que dichos valores hacen que $\sin\theta=0$ o $\cos\theta=0$.

Ahora bien, en la dirección $\theta=0,\pi$, el vector unitario es $\hat{v}_1=(\pm 1,0)$ y la correspondiente derivada es:

$$D_{\hat{v}_1}\phi(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{\phi(\pm h,0)}^{0}-\overbrace{\phi(0,0)}^{0}}{h}=0$$

mientras que en la direcciones $\theta = \pi/2, 3\pi/2$ el vector unitario es $\hat{v}_2 = (0, \pm 1)$ y la derivada es:

$$D_{\hat{v}_2}\phi(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{\phi(0,\pm h)}^{0} - \overbrace{\phi(0,0)}^{0}}{h} = 0$$

Por lo tanto,

$$D_{\hat{v}}\phi(0,0) = 0 \ , \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$$

b) Tenemos que ϕ es diferenciable en (0,0) si existen $\phi_x(0,0)$, $\phi_y(0,0)$ y, además:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\phi(h,k) - \phi(0,0) - \phi_x(0,0)h - \phi_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Ahora bien, sabemos que las parciales de primer orden son las derivadas direccionales para $\theta = 0$ –para ϕ_x– y $\theta = \pi/2$ –para ϕ_y–, es claro que ambas existen y son iguales a cero. Como, además, $\phi(0,0) = 0$, el límite anterior se convierte en:

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\phi(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h(1-\cos k)\sqrt{h^2+k^2}}{(h^2+k^4)\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h(1-\cos k)}{h^2+k^4} \end{aligned}$$

el cual **no** es cero ya que, si nos acercamos al origen por la parábola $h = k^2$ la fracción anterior tiende a:

$$\lim_{k\to 0} \frac{k^2(1-\cos k)}{k^4+k^4} = \frac{1}{2}\lim_{k\to 0}\frac{1-\cos k}{k^2} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, ϕ **no es diferenciable** en el origen.

■

(6) Encontrar el plano tangente de la función $h(x,y) = 3x^2 - 2y^2$ en el punto $(2,1,10)$

Solución:

Recordemos que la ecuación para el plano tangente en un punto $\vec{x}_0$ es:

$$(\vec{x} - \vec{x}_0)\cdot \nabla f(\vec{x}_0) = 0$$

El gradiente viene dado por:

$$\nabla f(\vec{x}_0) = \left.\begin{pmatrix} 6x \\ -4y \\ -1 \end{pmatrix}\right|_{\vec{x}_0=(2,1,10)} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Así,

$$\begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z-10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad 12x - 4y - z = 10$$

$\blacksquare$

(7) Dadas las funciones

$$f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2} \qquad \wedge \qquad g(x,y) = x^2 - y^2$$

determinar todos los $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que las curvas de nivel $S_a(f)$ y $S_b(g)$ sean ortogonales.

Solución:

Necesitamos que las curvas de nivel sean ortogonales, i.e. que sus vectores tangentes sean ortogonales. Dado que lo gradientes son ortogonales a sus respectivas curvas de nivel, solo nos basta exigir que $\nabla f \cdot \nabla g = 0$. Entonces:

$$\nabla f = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}(x,y)\ , \quad \nabla g = 2(x,-y)$$

Ahora,

$$\nabla f \cdot \nabla g = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{x^2-y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)} = \frac{b}{a} = 0$$

Esto implica que $b = 0$, y $a > 0$. $\blacksquare$

1.5. Regla de la cadena

(1) *a*) Sea $f(x,y) \in \mathcal{C}^2$, con $f_{xx}(0,1) = 0$, $f_x(0,1) = 2$, $f_y(0,1) = f_{yy}(0,1) = 1$ y $f_{xy}(0,1) = -1$. Si $h(t) = f(t^2, 1+t^3)$, calcule $h''(0)$.

b) Sea $f(u,v) \in \mathcal{C}^2$ una función *armónica*, y sea $g(x,y) = f(x^2-y^2, 2xy)$. Calcule Δg y demuestre que es constante.

Solución:

a) Sean $x(t) = t^2,\ y(t) = 1+t^3$. Por regla de la cadena, se sabe que:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{d}{dt}\Big(f(x,y)\Big) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = f_x x' + f_y y'$$

Así,

$$\frac{d^2h}{dt^2} = \frac{d}{dt}\Big(f_x x' + f_y y'\Big) = \frac{d}{dt}\Big(f_x\Big)x' + f_x x'' + \frac{d}{dt}\Big(f_y\Big)y' + f_y y''$$

con:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(f_x\Big) &= \frac{\partial f_x}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f_x}{\partial y}\frac{dy}{dt}\\ &= f_{xx}x'+f_{xy}y'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(f_y\Big) &= \frac{\partial f_y}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f_y}{\partial y}\frac{dy}{dt}\\ &= f_{yx}x'+f_{yy}y'\end{aligned}$$

Finalmente, y como $f_{xy}=f_{yx}$ por la continuidad,

$$h''=f_{xx}{x'}^2+2f_{xy}x'y'+f_{yy}{y'}^2+f_x x''+f_y y''$$

Reemplazando en $t=0$,

$$h''(0)=4$$

b) Sean $u=x^2-y^2,\ v=2xy$ de modo que $g(x,y)=f(u,v)$. Entonces, por la regla de la cadena:

$$g_x=f_u u_x+f_v v_x$$

Derivando nuevamente con respecto a x,

$$\begin{aligned}g_{xx} &= \Big(f_u\Big)_x+u_x+f_u u_{xx}+\Big(f_v\Big)_x+f_v v_{xx}\\ &= \Big(f_{uu}u_x+f_{uv}v_x\Big)+u_x+f_u u_{xx}+\Big(f_{vu}u_x+f_{vv}v_x\Big)+f_v v_{xx}\\ &= f_{uu}{u_x}^2+2f_{uv}u_x v_x+f_{vv}{v_x}^2+f_u u_{xx}+f_v v_{xx}\end{aligned}$$

usando que, por ser continuas, $f_{uv}=f_{vu}$. Calculando las expresiones dadas,

$$u_x=2x\ ,\quad u_{xx}=2\qquad\wedge\qquad v_x=2y\ ,\quad v_{xx}=0$$

Sustituyendo:

$$g_{xx}=4x^2f_{uu}+8xyf_{uv}+4y^2f_{vv}+2f_u$$

De manera análoga,

$$g_{yy}=f_{uu}{u_y}^2+2f_{uv}u_y v_y+f_{vv}{v_y}^2+f_u u_{yy}+f_v v_{yy}$$

y por ende:

$$g_{yy}=4y^2f_{uu}-8xyf_{uv}+4x^2f_{vv}-2f_u$$

Finalmente, sumando:

$$g_{xx}+g_{yy}=4(x^2+y^2)(f_{uu}+f_{vv})=0$$

ya que, por hipótesis, $\Delta f=0$. Así, hemos probado que el laplaciano de g es constante e igual a cero.

$\blacksquare$

(2) *a*) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con derivadas parciales continuas. La sustitución

$$u = \frac{x-y}{2} \ , \quad v = \frac{x+y}{2}$$

transforma $f(u,v)$ en $F(x,y)$. Exprese F_x y F_{xy} en términos de las variables u, v y de las derivadas parciales de f respecto a dichas variables.

b) Sea f una función diferenciable. De ella se conocen los siguientes datos:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(3,1) = 3 \ , \quad \hat{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(3,1) = \sqrt{2} \ , \quad \hat{v} = \frac{1}{\sqrt{10}}(3,1)$$

Con estos datos, calcular $\nabla f(3,1)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial \hat{w}}$, si $w = (3,2)$.

Solución:

a) Por la regla de la cadena,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

Derivando respecto a y,

$$\begin{aligned} F_{xy} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\Big(f_u + f_v\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big[\Big(f_{uu}u_y + f_{uv}v_y\Big) + \Big(f_{vu}u_y + f_{vv}v_y\Big)\Big] \\ &= -\frac{1}{4}\Big(f_{uu} - f_{vv}\Big) \end{aligned}$$

b) Aprovechando la diferenciabilidad de la función,

$$\begin{aligned} \nabla f \cdot \hat{u} = 3 \quad \longrightarrow \quad (f_x, f_y) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2) &= \frac{f_x}{\sqrt{5}} + \frac{2f_y}{\sqrt{5}} = 3 \\ \nabla f \cdot \hat{v} = \sqrt{2} \quad \longrightarrow \quad (f_x, f_y) \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}(3,1) &= \frac{3f_x}{\sqrt{10}} + \frac{f_y}{\sqrt{10}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Hemos formado un sistema lineal de 2×2, de donde es fácil establecer que:

$$\nabla f(3,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{7}{\sqrt{5}}\right)$$

Finalmente, como $\hat{w} = \frac{1}{\sqrt{13}}(3,2)$, entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{w}}(3,1) = \nabla f(3,1) \cdot \hat{w} = \frac{17}{\sqrt{65}}$$

$\blacksquare$

(3) *a*) Sea $\mathcal{P}$ el plano tangente a la superficie $z = 2x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 4y$ en el punto $(1,-1,-1)$. Hallar todos los puntos de la superficie $z = -x^2 + 4xy - 6y^2$ en los cuales el plano tangente el paralelo a $\mathcal{P}$.

b) Si $w = f\left(\dfrac{y-x}{xy}, \dfrac{z-y}{yz}\right)$, demuestre que para todo $x, y, z \neq 0$ se tiene que

$$x^2\frac{\partial w}{\partial x} + y^2\frac{\partial w}{\partial y} + z^2\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Solución:

a) Definamos dos funciones para facilitar la notación:

$$F(x,y,z) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 4y - z \qquad \wedge \quad G(x,y,z) = -x^2 + 4xy - 6y^2 - z$$

El vector normal del $\mathcal{P}$ es

$$\vec{n} = \nabla F(1,-1,-1) = (-4,-4,-1)$$

El vector normal a la segunda superficie, en un punto cualquiera, es:

$$\vec{t} = \nabla G(x,y,z) = (-2x + 4y, 4x - 12y, -1)$$

Entonces, buscamos los puntos (x,y) en los cuales $\vec{t} \parallel \vec{n}$. Como sus terceras componentes son iguales, es claro que:

$$-2x + 4y = -4 \qquad \wedge \qquad 4x - 12y = -4$$

cuya única solución es $(x,y) = (8,3)$. Por tanto, el punto buscado –luego de reemplazar (x,y) en las superficies– es $(8,3,-22)$.

b) Sean

$$u = \frac{y-x}{xy} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}\ , \quad v = \frac{z-y}{yz} = \frac{1}{y} - \frac{1}{z}$$

Por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x} &= f_u u_x + f_v v_x = -\frac{1}{x^2} f_u \\
\frac{\partial w}{\partial y} &= f_u u_y + f_v v_y = \frac{1}{y^2}\Big(f_u - f_v\Big) \\
\frac{\partial w}{\partial z} &= f_u u_z + f_v v_z = \frac{1}{z^2} f_v
\end{aligned}$$

de modo que:

$$x^2\frac{\partial w}{\partial x} + y^2\frac{\partial w}{\partial y} + z^2\frac{\partial w}{\partial z} = -f_u + f_u - f_v + f_v = 0$$

■

(4) Considere una función $\rho(x,y)$ que satisface las siguientes condiciones:

$$\rho_x(1,3) = 5\ , \quad \rho_y(1,3) = -4\ , \quad \rho_{xx}(1,3) = -2\ , \quad \rho_{yx}(1,3) - 8\ , \quad \rho_{yy}(1,3) = 10$$

Además, consideremos dos funciones $x(t), y(t)$ tales que:

$$x(0) = 1\ , \quad x'(0) = -1\ , \quad x''(0) = 3\ , \quad y(0) = 3\ , \quad y'(0) = 5\ , \quad y''(0) = -7$$

Definiendo $\phi(t) = \rho(x(t), y(t))$, calcule $\phi''(0)$.

Solución:

En términos de la curva plana

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

podemos escribir

$$\phi(t) = \rho(\gamma(t)) = \rho \circ \gamma(t)$$

Usando la regla de la cadena,

$$\phi'(t) = \nabla\rho(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \rho_x x' + \rho_y y'$$

De aquí, calculamos la segunda derivada de ϕ:

$$\phi''(t) = \frac{d}{dt}\Big(\rho_x\Big)x' + \rho_x x'' + \frac{d}{dt}\Big(\rho_y\Big)y' + \rho_y y''$$

Nuevamente, usando la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dt}\Big(\rho_x\Big) = \nabla\rho_x \cdot \gamma'(t) = \rho_{xx}x' + \rho_{xy}y'$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\rho_y\Big) = \nabla\rho_y \cdot \gamma'(t) = \rho_{yx}x' + \rho_{yy}y'$$

Reemplazando los datos del enunciado para $t = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big(\rho_x\Big)\Big|_{t=0} &= -2 \times -1 + -8 \times 5 \ = \ -38 \\ \frac{d}{dt}\Big(\rho_y\Big)\Big|_{t=0} &= -8 \times -1 + 10 \times 5 \ = \ 58 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\phi''(0) = -38 \times -1 + 5 \times 3 + 58 \times 5 - 4 \times -7 = 371$$

■

(5) Dado el cambio de variables $f(x, y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$, calcule el operador laplaciano

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

en coordenadas polares.

Solución:

Los cálculos realizados para la solución de este ejercicio se encuentran disponibles en:

- Cálculo realizado por el ayudante.
- Cálculo hecho en una página web.

■

2. Máximos y Mínimos

2.1. Máximos y mínimos sin restricciones

(1) Encuentre y clasifique los puntos críticos de la función $f(x,y) = (1-x)(1-y)(x+y-1)$.

Solución:

Formemos el sistema $f_x = f_y = 0$. Como:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= (y-1)(2x+y-2) \\ f_y(x,y) &= (x-1)(2y+x-2) \end{aligned}$$

consideramos los cuatro casos posibles:

(I) $(y-1) = (x-1) = 0$, y con ello $P_1 = (1,1)$

(II) $(y-1) = (2y+x-2) = 0$, y con ello $P_2 = (0,1)$

(III) $(2x+y-2) = (x-1) = 0$, y con ello $P_2 = (1,0)$

(IV) $(2x+y-2) = (2y+x-2) = 0$, y con ello $P_3 = (2/3, 2/3)$

Analizaremos los cuatro puntos críticos mediante el estudio del determinante de la matriz Hessiana:

$$|\mathbf{H}|(x,y) = f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 = 4(x-1)(y-1) - (2x+2y-3)^2$$

Entonces:

- P_1: $|\mathbf{H}|(1,1) = -1 < 0$, y por tanto hay un punto silla.
- P_2: $|\mathbf{H}|(0,1) = -1 < 0$, y por tanto hay un punto silla.
- P_3: $|\mathbf{H}|(1,0) = -1 < 0$, y por tanto hay un punto silla.
- P_4: $|\mathbf{H}|(2/3, 2/3) = 1/3 > 0$, y por tanto allí hay un extremo local. Como $f_{xx}(2/3, 2/3) = -2/3 < 0$, en el punto P_4 hay un máximo local.

■

(2) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función definida como $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f$, encontrar condiciones sobre las constantes $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ de forma tal que $f(x,y)$ pueda tener un máximo local.

Solución:

Dado que nos encontramos en un dominio abierto, las condiciones para los puntos críticos se reducen a $\nabla f = 0$. Entonces:

$$f_x = 2ax + 2by + d = 0 \qquad \wedge \qquad f_y = 2cy + 2by + e = 0$$

Este sistema de ecuaciones se puede escribir matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$$

Buscamos que el sistema posea por lo menos una solución. Si llamamos A a ma matriz de coeficientes para x e y, requerimos que la matriz sea invertible. Así:

$$|A| \neq 0 \quad \longrightarrow \quad 4ac - 4b^2 \neq 0$$

Ahora, analicemos el comportamiento de la matriz hessiana:

$$\mathbf{H}(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2c \end{pmatrix}$$

que es lo mismo que calculamos anteriormente. Así, la única condición –necesaria, pero no suficiente– buscada es $b^2 - ac \neq 0$. ■

(3) Suponga que solo dispone de una calculadora con las 4 operaciones básicas. Determine un valor aproximado para:

$$\frac{0.97}{\sqrt{15.05 + \sqrt[3]{0.98}}}$$

Solución:

Usamos una función de tres variables (una por cada número) que se acerque a la forma de la función pedida. Así, podemos elegir:

$$f(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{y + \sqrt[3]{z}}}$$

Si denotamos $(x_0, y_0, z_0) = (1, 15, 1)$, notaremos que las variaciones en torno a dicho punto son $(dx, dy, dz) = (-0.03, 0.05, -0.02)$. Aplicando el diferencial a nuestra función,

$$f(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz) \approx f(x_0, y_0, z_0) + df(x_0, y_0, z_0)$$

con

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Calculamos las derivadas:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left. \frac{1}{\sqrt{y + \sqrt[3]{z}}} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{2} \left(y + \sqrt[3]{z} \right)^{-3/2} \bigg|_{(x_0, y_0, z_0)} = -\frac{1}{128}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{x}{2} \left(y + \sqrt[3]{z} \right)^{-3/2} \frac{z^{-2/3}}{3} \bigg|_{(x_0, y_0, z_0)} = -\frac{1}{384}$$

Usando la calculadora,

$$df = -\frac{3.01}{384}\ , \quad f(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4}$$

Finalmente, el número buscado es:

$$\frac{1}{4} - \frac{3.01}{384} = 0.242161$$

■

(4) Sea $f(x, y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2 = (x^2 - y)(3x^2 - y)$

a) Demuestre que $(0, 0)$ es punto crítico de f.

b) Demuestre directamente que, a lo largo de toda recta por el origen, f alcanza un mínimo en $(0, 0)$.

c) Determine la naturaleza del punto $(0, 0)$ (¿es un máximo/mínimo local o un punto silla?)

Solución:

a) Tenemos que

$$f_x(x, y) = 12x^3 - 8xy\ , \quad f_y(x, y) = -4x^2 + 2y \quad \longrightarrow \quad \nabla f(0, 0) = (0, 0)$$

b) A excepción de los ejes coordenados, toda recta por el origen es de la forma $y = mx$, con $m \neq 0$. Ahora bien,

$$f(x, mx) = 3x^4 - 4mx^3 + m^2x^2 = g(x)$$

Entonces, como

$$g'(x) = 12x^3 - 12mx^2 + 2m^2x\ , \quad g''(x) = 36x^2 - 24mx + 2m^2$$

tenemos que $g'(0) = 0$ y $g''(0) = 2m^2 > 0$, por lo que hay un mínimo en $x = 0$. Sobre los ejes coordenados, $f(x, 0) = 3x^4$ y $f(0, y) = y^2$, es claro que hay un mínimo en el origen.

c) Punto máximo no puede ser, pues $f(0, 0)$ es mínimo a lo largo de las rectas por el origen. Si intentamos aplicar el criterio del hessiano vemos que:

$$\mathbf{H}(x, y) = \begin{pmatrix} 4x(9x - 2) & -8x \\ -8x & 2 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad |\mathbf{H}|(0, 0) = 0$$

de modo que dicho criterio no es concluyente. Ahora, si analizamos cualquier pequeño disco con centro en el origen –y notando que $f(0, 0) = 0$–, tendremos que:

- Como $f(x, y) = (x^2 - y)(3x^2 - y)$ tenemos que $f(x, y) < 0$ cuando $x^2 < y < 3x^2$ que es la región entre las parábolas $y = x^2$ e $y = 3x^2$.

- Dichos puntos existen en todo disco entrado en el origen, mostrando que en toda vecindad del origen hay puntos (x, y) donde $f(x, y) < f(0, 0)$, y por tanto $(0, 0)$ es un **punto silla**.

■

(5) Considere la superficie $z = x^2 + 5y^2$ y su plano tangente en $(1, 1, 6)$. Calcule la longitud del segmento de la recta dada por $x = 2, y = 2$ contenido entre el plano y la superficie.

Solución:

Primero que todo, calculamos el plano tangente a la superficie. Para esto, definimos la función $\phi = x^2 + 5y^2 - z$ y por tanto la superficie no es más que la curva de nivel $\phi(x, y, z) = 0$. Dado que el gradiente es **siempre** ortogonal a las curvas de nivel, encontramos el vector normal de dicha forma:

$$\vec{n} = \nabla\phi = (2x, 10y, -1)\Big|_{(1,1,6)} = (2, 10, -1)$$

De esta forma, el plano tangente se escribe como:

$$\Phi : \ \vec{n} \cdot \left(\vec{x} - \vec{p}_0\right) = 0$$

$$\Phi : \ (2, 10, -1) \cdot (x - 1, y - 1, z - 6) = 0 \quad \longrightarrow \quad \Phi : \ z = 2x + 10y - 6$$

Ahora, dado que la recta es ortogonal al plano XY, la longitud del segmento de recta buscado será simplemente la diferencia de alturas de ambas funciones, en los puntos de intersección con la recta:

$$z = x^2 + 5y^2\Big|_{x=y=2} = 24 \quad \wedge \quad z = 2x + 10y - 6\Big|_{x=y=2} = 18$$

y, por tanto, la longitud buscada es 6. ■

(6) Dada la función

$$h(x, y) = ax^2y + bxy^2 + \frac{a^2y^2}{2} + 2y$$

determine los valores de a, b de modo que la función tenga un punto silla en $(1, 1)$.

Solución:

Primero que todo, calculamos el gradiente de h:

$$\nabla h(x, y) = (2axy + by^2, ax^2 + 2xyb + a^2y + 2)$$

Luego, imponemos la condición que $(1, 1)$ sea punto silla. Esto requiere que $\nabla h(1, 1) = \vec{0}$ y que $\mathbf{H}(1, 1)$ tenga autovalores propios de distinto signo, o que el determinante $|\mathbf{H}|(1, 1)$ sea negativo.

De la condición sobre el gradiente,

$$(2a + b, a + a^2 + 2b + 2) = (0, 0)$$

De aquí deducimos que $2a + b = 0$, y entonces $a^2 - 3a + 2 = (a - 1)(a - 2) = 0$. Concluimos que $a = 1, b = -2$ o bien $a = 2, b = -4$.

Ahora, calculamos la matriz hessiana:

$$\mathbf{H}(x,y) = \begin{pmatrix} 2ay & 2ax+2by \\ 2ax+2by & 2bx+a^2 \end{pmatrix}$$

- Para $a = 1, b = -2$, obtenemos:

$$\mathbf{H}(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad |\mathbf{H}|(1,1) = -10$$

  y en este caso, $(1,1)$ es un punto silla.

- Para $a = 2, b = -4$, tenemos que:

$$\mathbf{H}(1,1) = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad |\mathbf{H}|(1,1) = -32$$

  así que, en este caso, $(1,1)$ también es un punto silla.

■

(7) Determine los puntos críticos y su naturaleza para

$$f(x,y,z) = x^3 - xz + yz - y^3 + 2z^3$$

Solución:

Tenemos que

$$f_x = 3x^2 - z \ , \quad f_y = z - 3y^2 \ , \quad f_z = -x + y + 6z^2$$

y resolviendo el sistema $f_x = f_y = f_z = 0$ obtenemos dos puntos críticos: $(0,0,0)$ y $(1/3, -1/3, 1/3)$. La matriz hessiana de f está dada por:

$$\mathbf{H}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x & 0 & -1 \\ 0 & -6y & 1 \\ -1 & 1 & 12z \end{pmatrix}$$

Así,

- $\mathbf{H}(0,0,0)$ posee autovalores $0, \pm\sqrt{2}$, por lo que hay un punto silla.
- $\mathbf{H}(1/3,-1/3,1/3)$ posee subdeterminantes positivos, por lo que hay un mínimo.

■

2.2. Máximos y mínimos con restricciones. Multiplicadores de Lagrange

(1) Encuentre los valores mínimos y máximos de la función

$$g(x, y, z) = xy + yz + xz$$

sobre la porción de la superficie

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{1}$$

que se encuentra en el primer *octante*, i.e. que adicionalmente satisface

$$x \geq 0,\ \ y \geq 0,\ \ z \geq 0 \tag{2}$$

Solución:

Como en este caso poseemos una restricción, consideremos el siguiente problema genérico: maximizar/minimizar $f(x, y)$ sujeto a $g(x, y) = c$. (ver Figura 1)

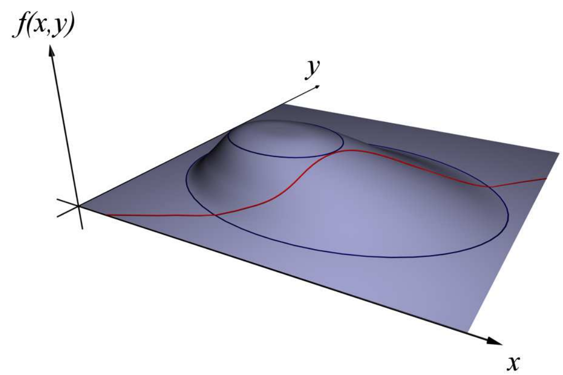


Figura 1: Problema de optimización

Supongamos que "caminamos" a lo largo de la curva de nivel $g = c$. En general, estos contornos –para f y g– serán distintos, así que siguiendo la trayectoria de $g = c$ podríamos intersectar alguna curva de nivel de f. Esto es equivalente a decir que mientras nos movemos a lo largo de la curva de nivel de $g = c$, el valor de f puede variar. Solo cuando el contorno de g tocan tangencialmente (no corta) a alguna curva de nivel de f, no se incrementa o disminuye el valor de f. (ver Figura 2)

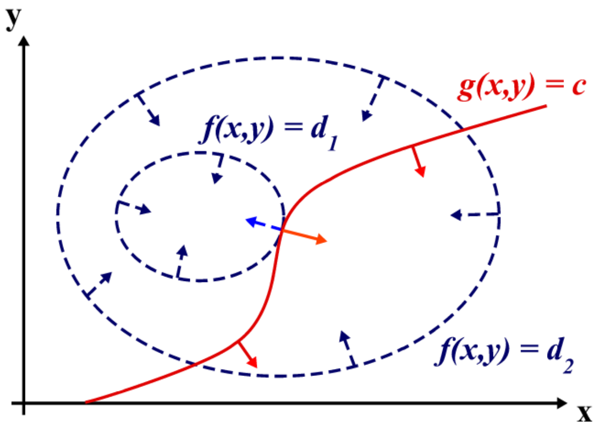


Figura 2: Curvas de nivel

Las líneas de contorno de f y g se intersectan cuando los vectores tangentes de ambas son paralelos. Dado que el gradiente de una función es perpendicular a su curva de nivel, entonces lo anterior equivale a decir que los gradientes de f, g son paralelos.

Para las funciones que tienen restricciones, planteamos una nueva función

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \Big(g_k(x_1, \ldots, x_n) - c_k \Big)$$

donde m es el número de restricciones dadas por las ecuaciones $g_k(\vec{x}) = c_k$. Entonces, la nueva condición para encontrar los puntos críticos será $\nabla \mathcal{L} = 0$ (con respecto a todas las variables).

Ahora, volvamos al problema que nos convoca. En este caso, la restricción corresponde al conjunto de nivel cero de la función

$$q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

La función de Lagrange del problema es:

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = g(x, y, z) - \lambda q(x, y, z)$$

Entonces:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = y + z - 2\lambda x = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = x + z - 2\lambda y = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = x + y - 2\lambda z = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

Sumando las tres primeras condiciones,

$$2x + 2y + 2z - 2\lambda(x + y + z) = 0 \quad \longrightarrow \quad (\lambda - 1)(x + y + z) = 0$$

Tenemos dos casos:

- $\lambda \neq 1$, y por tanto $x+y+z=0$. De la condición 2, notamos que $x=y=z=0$, la cual no es una solución admisible pues no satisface 1.
- $\lambda = 1$, y por tanto $x=y=z$. De la condición 1,

$$x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \longrightarrow \quad g\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=1$$

Esto, sin embargo, no resuelve el problema completamente. La restricción 1 corresponde a una esfera unitaria, pero la condición 2 indica que solo debemos considerar la porción de esfera del primer octante. Esto significa que la intersección de la esfera con cada uno de los cuadrantes

$$\{(x,y,z): x=0, y\geq 0, z\geq 0\},\ \{(x,y,z): y=0, x\geq 0, z\geq 0\},\ \{(x,y,z): z=0, x\geq 0, y\geq 0\}$$

corresponde a una parte de la frontera de la superficie que estamos considerando, y debe ser analizado por separado. Además, la región posee tres vértices, así que también evaluamos la función en esos puntos.

Consideremos el trozo de borde de la región que yace en el plano $z=0$. Esto es un cuarto de círculo, que puede parametrizarse mediante

$$\gamma(\theta)=(\cos\theta,\sin\theta,0)\ ,\quad \theta\in[0,\pi/2]$$

Evaluando la función g a lo largo de γ obtenemos:

$$g(\gamma(\theta))=\cos\theta\sin\theta$$

Derivando esta función con respecto a θ e igualando a cero, obtenemos:

$$0=-\sin^2\theta+\cos^2\theta=\cos 2\theta$$

La única solución de esta ecuación en el intervalo $[0,\pi/2]$ es $\theta=\pi/4$, que corresponde al punto

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right) \quad \longrightarrow \quad g\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)=\frac{1}{2}$$

La simetría evidente del problema (dominio y función) nos permite evitar los cálculos sobre los otros dos bordes: vamos a obtener los puntos

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

en el plano $y=0$, y

$$\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

en el plano $x=0$, con valor

$$g\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=g\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}$$

Finalmente, los vértices son $(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)$ con $g(1,0,0)=g(0,1,0)=g(0,0,1)=0$.

Así, el máximo global de g bajo las restricciones 1 y 2 es 1 y se alcanza en el punto $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, y el mínimo global es 0, y se alcanza en cada uno de los vértices. ■

(2) *a*) Demuestre que $x^3y > -\dfrac{3}{4}$ si $x^4 + y^4 = 1$.

b) Demuestre que $x^3y \geq -\dfrac{3}{4}(x^4 + y^4)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

c) Use la afirmación anterior para demostrar que la curva

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + x^3y + y^4 = 1\}$$

es acotada, i.e. existe un $M > 0$ tal que para todo $(x, y) \in C$ se cumple que $|x| \leq M$ e $|y| \leq M$.

Solución:

a) Para probar la afirmación, calcularemos los mínimos de la función $f(x, y) = x^3y$ sujeta a la condición $g(x, y) = x^4 + y^4 - 1 = 0$ vía multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} 3x^2y & = & 4\lambda x^3 \\ x^3 & = & 4\lambda y^3 \\ x^4 + y^4 & = & 1 \end{cases}$$

Si $xy = 0$, la solución del sistema es $(x, y) = (0, \pm 1)$ –con $\lambda = 0$–. Si $xy \neq 0$, despejando λ de las primeras dos ecuaciones nos queda que $x^4 = 3y^4$, lo cual –en combinación con la tercera ecuación– implica que

$$x^4 = \frac{3}{4}\,, \quad y^4 = \frac{1}{4}$$

Así, los puntos críticos son:

(x,y)	$\pm(0,1)$	$\pm\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\pm\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$f(x,y)$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$

Como la función $f(x, y) = x^3y$ es continua y el dominio $x^4 + y^4 = 1$ es cerrado y acotado, f tiene extremos globales. Estos extremos se encuentran necesariamente entre los puntos críticos condicionados, ya que f, g son continuamente diferenciables. De la tabla, obtenemos que el mínimo global de f en el dominio es:

$$x^3y > -\frac{3\sqrt{3}}{4} > -\frac{3}{4}$$

b) El apartado anterior, escrito en coordenadas polares, establece que:

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^4\cos^3\theta\sin\theta > -\frac{3}{4} \quad \text{cuando} \quad r^4 = \frac{1}{\cos^4\theta + \sin^4\theta}$$

Es decir,

$$\frac{\cos^3\theta\sin\theta}{\cos^4\theta + \sin^4\theta} > -\frac{3}{4} \qquad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

Después de multiplicar ambos lados de la desigualdad por la expresión no negativa $r^4(\cos^4\theta + \sin^4\theta)$ vemos que

$$r^4\cos^3\theta\sin\theta \geq -\frac{3r^4}{4}(\cos^4\theta + \sin^4\theta)$$

Volviendo a coordenadas cartesianas,

$$x^3y \geq -\frac{3}{4}(x^4 + y^4)$$

c) Para los puntos de la curva C, tenemos que $x^3y = 1 - x^4 - y^4$. La desigualdad del apartado anterior implica que, para estos puntos, se cumple que:

$$1 - x^4 - y^4 = x^3y \geq -\frac{3}{4}(x^4 + y^4)$$

Es decir,

$$x^4 + y^4 \leq 4 \quad \longrightarrow \quad |x| \leq \sqrt{2},\ |y| \leq \sqrt{2}$$

■

(3) Hallar el máximo y el mínimo de la función $f(x, y, z) = x^2 + yz$ en la bola $B = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Solución:

Primero, buscamos los candidatos a extremos en el interior de la bola: $x^2 + y^2 + z^2 < 1$. Estos han de ser extremos libres de f, y por tanto –de existir– debe cumplirse que $\nabla f = 0$. El sistema es:

$$f_x = 2x = f_y = z = f_z = y = 0$$

La única solución es el punto $P_1 = (0, 0, 0)$ que, efectivamente, está dentro de la bola.

Buscamos ahora los posibles valores extremos en la frontera de la bola. Sea $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Entonces, queremos extremar f bajo la restricción $g = 1$ y, por Lagrange, en los puntos buscados deben existir valores de λ tales que:

$$\nabla f = \lambda\nabla g \quad \longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccc} 2x & = & 2\lambda x \\ z & = & 2\lambda y \\ y & = & 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 & = & 1 \end{array}\right.$$

Si $x = 0$, entonces no puede darse el caso en que $y = z = 0$ –por la cuarta ecuación– y, como la segunda y tercera ecuación implican que si uno de ellos es cero el otro también lo es, ninguna de las variables z, y pueden ser 0. Así, podemos dividir las ecuaciones dos y tres:

$$\frac{y}{z} = \frac{z}{y} \quad \longrightarrow \quad y^2 = z^2 \quad \longrightarrow \quad z = \pm y$$

Sustituyendo esta combinación en la cuarta ecuación, llegamos a los puntos críticos:

$$P_2 = (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \qquad P_4 = (0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$$
$$P_3 = (0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) \qquad P_5 = (0, -1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$$

Si en las ecuaciones de más arriba tenemos que $\lambda = 1$, entonces la segunda y tercera ecuación nos dicen que $y = 2z$ y $z = 2y$, y por tanto $y = z = 0$. Con ello, de la cuarta ecuación, $x = \pm 1$. De este modo:

$$P_6 = (1, 0, 0) \qquad P_7 = (-1, 0, 0)$$

Evaluando f en los siete puntos críticos, llegamos a que el máximo/mínimo es:

$$\text{máx}\{f\} = 1 = f(P_6) = f(P_7)\ , \quad \text{mín}\{f\} = -\frac{1}{2} = f(P_3) = f(P_4)$$

■

(4) *a*) Dada la función $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$, determine el punto más cercano al origen de su plano tangente en el punto $(1, 1, 3)$.

b) Encontrar el volumen máximo de un paralelepípedo de diagonal 1.

Solución:

a) Usaremos el gradiente como vector normal al plano, y con esto obtenemos:

$$\vec{n} = (2x + y, 2y + x, -1)\Big|_{(1,1,3)} = (3, 3, -1)$$

$$\therefore\ \Pi : z = 3x + 3y - 3$$

De optimización, sabemos que minimizar la distancia equivale a minimizar la distancia al cuadrado. Entonces, consideremos $d(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ la función distancia al cuadrado al origen. Queremos:

$$\text{mín}\ \ d(x, y, z)$$
$$s.a.\ z = 3x + 3y - 3$$

Usando multiplicadores de Lagrange,

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(3x + 3y - z - 3) \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2x & = & 3\lambda \\ 2y & = & 3\lambda \\ 2z & = & -\lambda \\ 3x + 3y - z & = & 3 \end{array} \right.$$

De las dos primeras ecuaciones obtenemos que $x = y$. Reemplazando en la última ecuación, junto con z de la ecuación tres, obtenemos que

$$6x + \frac{\lambda}{2} = 3$$

Usando la primera ecuación nuevamente, podemos despejar el valor de λ, concluyendo que este es $\lambda = \dfrac{6}{19}$. Reemplazando en cadena, llegamos a que el punto buscado es:

$$P = \left(\frac{9}{19}, \frac{9}{19}, -\frac{3}{19}\right)$$

Sabemos que es un mínimo y no un máximo, pues el punto más lejano al origen tiene todas sus componentes infinitas.

b) El volumen del paralelepípedo está dado por el producto entre su base y su altura, i.e. $V = xyz$ si x, y, z son sus lados. Ahora, la longitud de su diagonal está dada por $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1$. Queremos entonces:

$$\begin{aligned} &\text{máx } V(x,y,z) = xyz \\ &s.a. \; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{aligned}$$

En la restricción, nuevamente usamos la distancia al cuadrado. Así,

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = xyz - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} yz & = & 2x\lambda \\ xz & = & 2y\lambda \\ xy & = & 2z\lambda \\ x^2 + y^2 + z^2 & = & 1 \end{array} \right.$$

Multiplicamos la primera ecuación por x, la segunda por y y la tercera por z:

$$xyz = 2x^2\lambda = 2y^2\lambda = 2z^2\lambda$$

De esta igualdad, obtenemos que $x^2 = y^2$. Como lo que buscamos son distancias, tanto x como y son mayores o iguales a cero, y por tanto $x = y$. De manera análoga, es posible concluir que $x = z$ y $z = y$. Reemplazando en la cuarta condición,

$$x^2 + x^2 + x^2 = 1 \quad \longrightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Como $x = y = z$, el volumen máximo es:

$$V_{\text{máx}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3$$

■

(5) Hallar la mayor y menor distancia entre el elipsoide $x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 2$. (*Nota:* Ambas superficies <u>no</u> se intersecan).

Solución:

Sean (x, y, z) y (u, v, w) puntos sobre el elipsoide y el plano, respectivamente. Sabemos que es suficiente extremar el cuadrado de la distancia entre ellos:

$$d(x,y,z,u,v,w) = (x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2$$

Así, debemos extremar la función d sujeto a las restricciones

$$F_1(x,y,z) = x^2 + 4y^4 + z^2 - 1 = 0 \ , \quad F_2(u,v,w) = u + v + w - 2 = 0$$

El lagrangiano es simplemente:

$$\mathcal{L}(x,y,z,u,v,w,\lambda_1,\lambda_2) = d - \lambda_1 F_1 - \lambda_2 F_2$$

Así, el sistema $\nabla \mathcal{L} = 0$ queda como sigue:

$$\begin{aligned}
2(x-u) &= 2x\lambda_1 && (3)\\
2(y-v) &= 8y\lambda_1 && (4)\\
2(z-w) &= 2z\lambda_1 && (5)\\
2(x-u) &= -\lambda_2 && (6)\\
2(y-v) &= -\lambda_2 && (7)\\
2(z-w) &= -\lambda_2 && (8)\\
x^2 + 4y^2 + z^2 &= 1 && (9)\\
u + v + w &= 2 && (10)
\end{aligned}$$

De las ecuaciones (6), (7) y (8), igualando,

$$x - u = y - v = z - w \tag{11}$$

Así, los lados izquierdos de las ecuaciones (3), (4) y (5) son iguales; entonces, igualando los lados derechos de (3) y (4) obtenemos que $2x\lambda_1 = 8y\lambda_1$.

Ahora bien, $\lambda_1 \neq 0$ pues, de ser cero, tendríamos que $(x,y,z) = (u,v,w)$ lo cual es imposible, pues ambas superficies no se intersecan. Por tanto, cancelamos λ_1 obteniendo $y = \dfrac{x}{4}$. De manera análoga, obtenemos que $z = x$. Sustituyendo estas dos condiciones en la igualdad (9) llegamos a:

$$\frac{9}{4}x^2 = 1 \quad \longrightarrow \quad x = \pm\frac{2}{3}$$

- Si $x = 2/3$, entonces $y = 1/6$, $z = 2/3$.
  Usando (11) tenemos que $v = y - x + u = u - \dfrac{1}{2}$ y que $w = z - x + u = u$. Sustituyendo estas relaciones en (10) obtenemos:

  $$2 = 3u - \frac{1}{2} \quad \longrightarrow \quad u = \frac{5}{6}$$

  Por tanto,

  $$x - u = y - v = z - w = -\frac{1}{6} \quad \longrightarrow \quad d = 3\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{12}$$

- $x = -2/3$, entonces $y = -1/6$, $z = -2/3$.

  Usando (11) como antes, tenemos que $v = u + \dfrac{1}{2}$ y que $w = u$. Al sustituir en (10) obtenemos:

  $$2 = 3u + \frac{1}{2} \quad \longrightarrow \quad u = \frac{1}{2}$$

  Por tanto,

  $$x - u = y - v = z - w = -\frac{7}{6} \quad \longrightarrow \quad d = 3\left(\frac{7}{6}\right)^2 = \frac{49}{12}$$

Por último, notamos que –como el elipsoide es un conjunto cerrado y acotado en $\mathbb{R}^2$– debe existir un punto más cercano/lejano al plano, cuyas distancias corresponden a las soluciones obtenidas.

Luego, la distancia mínima es $d_m = \dfrac{1}{\sqrt{12}}$ y la distancia máxima es $d_M = \dfrac{7}{\sqrt{12}}$. ■

(6) **[Propuesto]** Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $f(\vec{x}) = (x_1 x_2 \cdots x_n)^2$. Buscar los extremos sobre la esfera ${x_1}^2 + {x_2}^2 + \ldots + {x_n}^2 = \rho^2$. Use este resultado para probar la desigualdad entre la media geométrica y la aritmética.

Solución:

Aplicando los multiplicadores de Lagrange, ya llamando p_0 a nuestro punto máximo, escribimos:

$$\nabla f(p_0) = \lambda \nabla g(p_0)$$

$$g(\vec{x}) = {x_1}^2 + \ldots + {x_n}^2 - \rho^2$$

$$g(p_0) = 0$$

Derivando la igualdad, obtenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2(x_2 \cdots x_n)(x_1 \cdots x_n) = 2\lambda x_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2(x_1 \cdot x_3 \cdots x_n)(x_1 \cdots x_n) = 2\lambda x_2$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} = 2(x_1 \cdots x_{n-1})(x_1 \cdots x_n) = 2\lambda x_n$$

Si multiplicamos la primera igualdad por x_1, la segunda por x_2, etcétera, hasta la última por x_n, tenemos que:

$$(x_1 \cdots x_n)^2 = \lambda {x_1}^2$$

$$(x_1 \cdots x_n)^2 = \lambda {x_2}^2$$

$$\vdots$$

$$(x_1 \cdots x_n)^2 = \lambda {x_n}^2$$

Sumando todas las ecuaciones, llegamos a:

$$n(x_1 \cdots x_n)^2 = \lambda({x_1}^2 + {x_2}^2 + \ldots + {x_n}^2) = \lambda\rho^2 \quad \longrightarrow \quad \lambda = \frac{n(x_1 \cdots x_n)^2}{\rho^2}$$

Reemplazando λ en las ecuaciones, encontramos

$${x_i}^2 = \frac{\rho^2}{n}$$

Luego, si llamamos $P = \left(\frac{\rho}{\sqrt{n}}, \frac{\rho}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{\rho}{\sqrt{n}}\right)$, f tiene un máximo en P con restricción $g(P) = 0$. Además, dado que P es un máximo, concluimos que para un punto $\vec{x}$ cualquiera que se encuentre en la esfera:

$$\begin{array}{rcl} f(\vec{x}) & \leq & f(P) \\ \left({x_1}^2 \cdots {x_n}^2\right) & \leq & \left(\frac{\rho^2}{n} \cdots \frac{\rho^2}{n}\right) \\ \left({x_1}^2 \cdots {x_n}^2\right) & \leq & \left(\frac{\rho^2}{n}\right)^n \\ \left({x_1}^2 \cdots {x_n}^2\right)^{\frac{1}{n}} & \leq & \left(\frac{\rho^2}{n}\right) \\ \left({x_1}^2 \cdots {x_n}^2\right)^{\frac{1}{n}} & \leq & \left(\frac{{x_1}^2 + \ldots {x_n}^2}{n}\right) \end{array}$$

Llamando ${x_i}^2 = a_i$, obtenemos:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

Con lo que hemos probado esta desigualdad. Notar que, aunque lo hemos demostrado para un punto sobre la esfera, a todo $\vec{x}$ en el espacio le podemos asociar un ρ tal que dicho punto esté contenido en una esfera. $\blacksquare$

3. Funciones vectoriales en varias variables

3.1. Diferenciabilidad en funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

(1) *a*) Sean $f(x,y) = (x^2+y^2, x^2-y^2)$ y $g(u,v) = (uv, u+v)$. Se define $F = g \circ f$. Calcular $DF(x,y)$.

b) Sean $w(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ y $v(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r)$. Calcule, utilizando la regla de la cadena, la matriz derivada de $(w \circ v)$ en el punto (1,0).

Solución:

a) Sabemos que

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Así,

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix} \qquad \wedge \qquad Dg(u,v) = \begin{pmatrix} v & u \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por la regla de la cadena,

$$DF(x,y) = Dg(f(x,y)) \circ Df(x,y) \qquad \text{Con: } Dg(f(x,y)) = \begin{pmatrix} x^2-y^2 & x^2+y^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} x^2-y^2 & x^2+y^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^3 & -4y^3 \\ 4x & 0 \end{pmatrix}$$

b) Tenemos que $v(1,0) = (1,0,1)$ y $w(1,0,1) = \sqrt{2}$. La matriz derivada de $w(x,y,z)$ es

$$\begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{pmatrix}$$

y por tanto, al reemplazar en (1,0,1) no queda:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Por otra parte, la matriz derivada de $v(r,\theta)$ es

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y con ello, en (1,0):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, la matriz derivada de $w \circ v$ en (1,0) es:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{2}} \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

■

(2) Dadas las funciones

$$G(u,v) = (u, u^2, u\cos v) \quad \wedge \quad F(x,y,z) = (x, xy, xyz)$$

se considera la función compuesta $H = F \circ G = (H_1, H_2, H_3)$. Encontrar $\dfrac{\partial H_2}{\partial v}$ y $\dfrac{\partial H_3}{\partial u}$.

Solución:

Observemos que:

$$DG(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2u & 0 \\ \cos v & -u\sin v \end{pmatrix} \quad , \quad DF(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & x & 0 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

Por la regla de la cadena, sabemos que

$$\begin{aligned} DH(u,v) &= DF(G(u,v)) \cdot DG(u,v) \\ &= DF(u, u^2, u\cos v) \cdot DG(u,v) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3u^2 & 0 \\ 4u^3\cos v & -u^4\sin v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De donde se deduce que:

$$\frac{\partial H_2}{\partial v} = 0 \qquad \wedge \qquad \frac{\partial H_3}{\partial u} = 4u^3\cos v$$

■

3.2. Teoremas de la Función Inversa e Implícita

(1) Considere la función vectorial $(x,y) \to (x, x+2y+y^2) = (u,v)$

a) Determine todos los puntos (x, y) en los que el Teorema de la Función Inversa garantiza la existencia de una inversa local diferenciable $x = x(u, v),\ y = y(u, v)$ y, sin despejar explícitamente, calcule $y_v,\ y_{vu}$.

b) Encuentre explícitamente la inversa local $x = x(u, v),\ y = y(u, v)$ en una vecindad del punto $(x, y) = (1, -2)$ y, a partir de tales expresiones, calcule nuevamente y_v.

Solución:

Antes que todo, un pequeño recordatorio:

Definición. Sea $F : \Omega \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. F se dice localmente inyectiva en torno a $\vec{x}_0$ si existe $r > 0$ tal que F es inyectiva en $B(\vec{x}_0, r) \subset \Omega$.

Teorema (de la función inversa). Sea $F : \Omega \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, Ω abierto, una función diferenciable, y sea $\vec{x}_0 \in \Omega$. Si $|DF(\vec{x}_0)| \neq 0$, entonces existe $r > 0$ tal que $F : B(\vec{x}_0, r) \to F(B(\vec{x}_0, r))$ es inyectiva. La inversa $G : F(B(\vec{x}_0, r)) \to B(\vec{x}_0, r)$ es diferenciable y $DG(F(\vec{x}_0)) = DF(\vec{x}_0)^{-1}$.

Notación Diremos que el jacobiano de la transformación $(x, z) \to (F, G)$ es

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)} \equiv \begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}$$

a) Por definición del jacobiano,

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2(y+1) \end{vmatrix} = 2(y+1)$$

Así, la función es invertible localmente alrededor de todo punto (x, y) con $y \neq -1$ (el plano menos la recta horizontal $y = -1$). Por el T.F.I. nuevamente,

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}} \begin{pmatrix} v_y & -u_y \\ -v_x & u_x \end{pmatrix}$$

Igualando posiciones,

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{u_x}{\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}} = \frac{1}{2(y+1)}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} y_{vu} &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{2(y+1)}\right) \\ &= -\frac{y_u}{2(y+1)^2} \end{aligned}$$

Comparando otra vez las matrices de la función inicial y de su inverse, observamos que:

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{v_x}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = -\frac{1}{2(y+1)}$$

Finalmente, sustituyendo llegamos a que:

$$y_{vu} = \frac{1}{4(y+1)^3}$$

b) Tenemos que

$$\begin{aligned} u &= x \\ v &= x + 2y + y^2 \end{aligned}$$

Entonces, $u = x$ y sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos:

$$(u - v) + 2y + y^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad y = -1 \pm \sqrt{1 + v - u}$$

Como estamos en una vecindad del punto $(x, y) = (1, -2)$, la cantidad y debe ser menor que -1, y por ello debemos elegir el signo negativo en la última expresión. Por tanto, la inversa local buscada es

$$(u, v) \to (u, -1 - \sqrt{1 + v - u}) = (x, y)$$

Derivando directamente,

$$y_v = \frac{\partial}{\partial v}\Big(-1 - \sqrt{1 + v - u}\Big) = -\frac{1}{2\sqrt{1 + v - u}} = \frac{1}{2(y+1)}$$

■

(2) Sea $G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $G = (G_1, G_2)$ una función con derivadas parciales continuas en $\mathbb{R}^4$ y tal que satisface $G(0,0,0,0) = (0,0)$ y

$$\frac{\partial G_1}{\partial z}\frac{\partial G_2}{\partial w} - \frac{\partial G_2}{\partial z}\frac{\partial G_1}{\partial w} \neq 0 \qquad \text{en el punto } (0,0,0,0).$$

Se define $H(x, y, z, w) = (x, y, G_1(x, y, z, w), G_2(x, y, z, w))$.

a) Probar que H es localmente invertible en el origen.

b) Suponga que $\nabla G_1(\vec{0}) = (0, 0, 2, 0)$ y $\nabla G_2(\vec{0}) = (0, 0, 0, 3)$. Calcule la matriz jacobiana de $K = G \circ H^{-1}$ en el origen.

Solución:

a) Si DH denota la matriz jacobiana de H, entonces la función es invertible en una vecindad del origen si su determinante allí es distinto de cero –T.F.I.– y por tanto:

$$DH = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ G_{1x} & G_{1y} & G_{1z} & G_{1w} \\ G_{2x} & G_{2y} & G_{2z} & G_{2w} \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es

$$|DH(0,0,0,0)| = \frac{\partial G_1}{\partial z}\frac{\partial G_2}{\partial w} - \frac{\partial G_2}{\partial z}\frac{\partial G_1}{\partial w} \neq 0 \qquad \text{en el origen, por hipótesis.}$$

b) Notamos que $H(0,0,0,0) = (0,0,0,0)$, por lo cual $H^{-1}(\vec{0}) = \vec{0}$. Aplicando la regla de la cadena y el T.F.I. se obtiene:

$$\begin{aligned} DK(0,0,0,0) &= DG(H^{-1}(0,0,0,0)) \cdot DH^{-1}(0,0,0,0) \\ &= DG(H^{-1}(0,0,0,0)) \cdot \Big(DH(0,0,0,0)\Big)^{-1} \end{aligned}$$

Ahora bien, por el apartado anterior,

$$DH(0,0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \Big(DH(0,0,0,0)\Big)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Mientras que:

$$DG(0,0,0,0) = \begin{pmatrix} \nabla G_1(0,0,0,0) \\ \nabla G_2(0,0,0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$DK(0,0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

■

(3) Considere la transformación $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$u = xy^2 \ , \quad v = x + 3y \ , \quad w = z - x$$

Se verifica que $F(A) = F(B) = (4,7,-2) = C$ para los puntos $A = (4,1,2)$ y $B = (1,2,-1)$.

a) Pruebe que en torno a ambos puntos A, B existen inversas locales $(x,y,z) = G_1(u,v,w)$ y $(x,y,z) = G_2(u,v,w)$ que satisfacen $G_1(C) = A$, $G_2(C) = B$.

b) Calcule $\dfrac{\partial x}{\partial v}$, en el punto C, para ambas inversas.

Solución:

a) Como las funciones u, v, w son polinomios, tienen todas sus derivadas continuas; luego, basta ver qué valores toma el jacobiano en esos puntos.

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} y^2 & 2xy & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3y^2 - 2xy$$

Evaluando en los puntos, tenemos:

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}(A) = -5 \neq 0 \qquad \wedge \qquad \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}(B) = 8 \neq 0$$

luego, por el Teorema de la Función Inversa, en ambos puntos hay una inversa local.

b) Para calcular x_v en el punto C, en torno al punto A, consideremos primero la matriz jacobiana de la función F:

$$DF(A) = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad |DF(A)| = -5$$

¿Cómo invertir una matriz de 3×3?

(1) Encontrar el determinante de la matriz a invertir, $\det(M)$

(2) Determinar la transpuesta de la matriz a invertir, M^t

(3) Calcular cada uno de los subdeterminates de las submatrices de 2×2 de M^t

(4) Ubique los cofactores $m_{j,k} = m_{fil,col}$ en el lugar que les corresponde –i.e. de donde fueron calculados, en la posición (j,k)–, multiplicándolos por $(-1)^{k+j}$

(5) Divida la matriz obtenida en el paso anterior por el determinante del primer paso, y el resultado será M^{-1}

Para más información, diríjase aquí.

Usando la información anterior,

$$\frac{\partial x}{\partial v}(4,1,2) = \frac{-8}{-5} = \frac{8}{5}$$

En el punto B, la matriz jacobiana es:

$$DF(B) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad |DF(B)| = 8$$

y con ello:

$$\frac{\partial x}{\partial v}(1,2,-1) = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

$\blacksquare$

(4) *a*) Considere el sistema dado por $F(x,y,u,v) = 0,\ G(x,y,u,v) = 0$, donde F, G son funciones con derivadas parciales continuas que satisfacen

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} \neq 0$$

Muestre que, para las variables $u = u(x,y),\ v = v(x,y)$ despejadas localmente, se cumple que:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} \Bigg/ \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$$

b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable, con $f(0,0) = 1, f(0,1) = 0, \nabla f(0,0) = (a,b), \nabla f(0,1) = (c,d)$. Se define $g(x,y) = (yf(x,y), x + f(x,y))$. Encontrar $D(g \circ g)(0,0)$.

Solución:

a) Si las funciones despejadas son $u = f(x,y)$ y $v = g(x,y)$, entonces las funciones

$$H_1(x,y) = F(x,y,f(x,y),g(x,y)) \quad \wedge \quad H_2(x,y) = G(x,y,f(x,y),g(x,y))$$

Son constantes iguales a cero. Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} H_{1x} & H_{1y} \\ H_{2x} & H_{2y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} F_x + F_u f_x + F_v g_x & F_y + F_u f_y + F_v g_y \\ G_x + G_u f_x + G_v g_x & G_y + G_u f_y + G_v g_y \end{pmatrix} &= \\
\begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} &=
\end{aligned}$$

Como $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} \neq 0$, $\begin{pmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{pmatrix}$ es invertible. Luego,

$$\begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -F_x & -F_y \\ -G_x & -G_y \end{pmatrix}$$

Tomando los determinantes nos queda

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} \Bigg/ \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$$

b) Tenemos que

$$Dg(x,y) = \begin{pmatrix} yf_x(x,y) & f(x,y) + yf_y(x,y) \\ 1 + f_x(x,y) & f_y(x,y) \end{pmatrix}$$

Se tiene que $D(g \circ g)(0,0) = Dg(g(0,0)) \cdot Dg(0,0)$, y $g(0,0) = (0,1)$; por tanto:

$$D(g \circ g)(0,0) = Dg(0,1) \cdot Dg(0,0) = \begin{pmatrix} c & d \\ 1+c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1+a & b \end{pmatrix}$$

■

(5) Mostrar que las ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - u^3 + v + 3 &= 0 \\ 2xy + y^2 - 2u + \frac{u^4}{4} - \frac{5}{4} &= 0 \end{aligned}$$

determinan funciones $u(x,y)$, $v(x,y)$ definidas para (x,y) cerca de $(1,1)$ y tales que $u(1,1) = 1$ y $v(1,1) = -2$. Calcular u_x, u_{xy} en $(1,1)$.

Solución:

Antes que todo, un nuevo recordatorio:

Teorema (de la función implícita). Consideremos n ecuaciones en $m = n + k$ variables:

$$\left.\begin{array}{c} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0 \\ \vdots \\ F_n(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0 \end{array}\right\} (*)$$

Sea $p_0 = ({x_1}^0, {x_2}^0, \ldots, {x_m}^0)$ un punto que satisface el sistema $(*)$. Si

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} (p_0) \neq 0$$

entonces, existe $r > 0$ y funciones diferenciables $f_1(x_{n+1}, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_{n+1}, \ldots, x_m)$ de modo que toda solución de $(*)$ en un entorno de $B(p_0, r)$ se describe como

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(x_{n+1}, \ldots, x_m) \\ &\vdots \\ x_n &= f_n(x_{n+1}, \ldots, x_m) \end{aligned}$$

Las derivadas parciales $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = n+1, \ldots, m$ se calculan por regla de la cadena (derivación implícita).

Volviendo al problema que nos convoca, sean

$$F(x,y,u,v) = x^2 - y^2 - u^3 + v + 3 \ , \quad G(x,y,u,v) = 2xy + y^2 - 2u + \frac{u^4}{4} - \frac{5}{4}$$

Dado que $F(1,1,1,-2) = G(1,1,1,-2) = 0$, según el Teorema de la Función Implícita, se pueden despejar localmente u y v en las cercanías de dicho punto si

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} \neq 0$$

Tenemos que

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3u^2 & 1 \\ u^3-2 & 0 \end{vmatrix} = 2 - u^3$$

el cual vale $1 \neq 0$ cuando $x = y = u = 1$ y $v = -2$. Por tanto, sí es posible el despeje. Derivando implícitamente,

$$\begin{aligned} 2x - 3u^2 u_x + v_x &= 0 \\ 2y - 2u_x + u^3 u_x &= 0 \end{aligned}$$

Nos queda un sistema para u_x, v_x. Por Regla de Cramer, tenemos que:

$$u_x = \frac{\begin{vmatrix} 2x & -1 \\ 2y & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3u^2 & -1 \\ 2-u^3 & 0 \end{vmatrix}} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = \frac{2y}{2-u^3}$$

Por tanto, $u_x(1,1,1,-2) = \dfrac{2}{2-1^3} = 2$. Ahora,

$$u_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{2-u^3}\right) = \frac{2(2-u^3) - 2y(-3u^2)u_y}{(2-u^3)^2}$$

Evaluando en el punto $(1,1,1,-2)$ resulta que $u_{xy}(1,1,1,-2) = 2 + 6u_y(1,1)$. Entonces,

$$u_y = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = \frac{2y+2x}{2-u^3}$$

de donde $u_y(1,1) = 4$ y, por tanto, $u_{xy}(1,1,1,-2) = 26$. ∎

(6) Sean $F, G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $F = F(x,y,u,v)$, $G = G(x,y,u,v)$, dos funciones diferenciables tales que en $P = (1,2,1,2)$ satisfacen

$$\begin{aligned} F_x(P) &= 1, & F_y(P) &= 2, \\ F_u(P) &= 1, & F_v(P) &= -1, \\ G_x(P) &= 0, & G_y(P) &= -1, \\ G_u(P) &= 2, & G_v(P) &= -2. \end{aligned}$$

Considere el sistema

$$F(P) = G(P) = 0$$

a) Compruebe que es posible despejar el sistema $x = x(u, v)$ con $x(1, 2) = 1$, en un entorno de $(u, v) = (1, 2)$, y calcule $x_v(1, 2)$.

b) Compruebe que es posible despejar el sistema $x = x(y, v)$ con $x(2, 2) = 1$, en un entorno de $(y, v) = (2, 2)$, y calcule $x_v(2, 2)$.

Solución:

Definamos primero $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ mediante la ecuación

$$T(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} F(x, y, u, v) \\ G(x, y, u, v) \end{pmatrix}$$

a) Usando el T.F.Im, para despejar (x, y) en términos de (u, v) en torno al punto $(u, v) = (1, 2)$, necesitamos que la matriz

$$DT_{x,y}(x, y, u, v)$$

sea invertible. De la información del enunciado,

$$DT_{x,y}(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} = -1 \neq 0$$

Así, podemos derivar –sin problemas– el sistema con respecto a v:

$$\begin{array}{rcl} F_x x_v + F_y y_v + F_v & = & 0 \\ G_x x_v + G_y y_v + G_v & = & 0 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} x_v + 2y_v - 1 & = & 0 \\ -y_v - 2 & = & 0 \end{array} \quad \longrightarrow \quad x_v(1, 2) = 5$$

b) Como el problema es, esencialmente, el mismo que antes, requerimos que la matriz $DT_{x,u}(P)$ sea invertible. Así,

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, u)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

y se cumple. Nuevamente, derivamos el sistema con respecto a v:

$$\begin{array}{rcl} F_x x_v + F_u u_v + F_v & = & 0 \\ G_x x_v + G_u u_v + G_v & = & 0 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} x_v + u_v - 1 & = & 0 \\ 2u_v - 2 & = & 0 \end{array} \quad \longrightarrow \quad x_v(2, 2) = 0$$

■

(7) *a*) Determine los valores de a para los cuales el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rcl} xz^3 + yu + ax & = & 1 \\ 2xy^3 + u^2 z + a(y - 1) & = & 0 \end{array} \right.$$

define a (x, y) como función implícita de (z, u) en un entorno del punto $(x_0, y_0, z_0, u_0) = (0, 1, 0, 1)$.

b) Denotemos la función implícita de la parte anterior (cuando ésta exista) por $(x,y)=G(z,u)$. Calcule los valores de a para los cuales G admite inversa local diferenciable en torno a un punto $(0,1)$.

Solución:

a) Sea $P=(0,1,0,1)$, y sean $F_1(x,y,z,u)=xz^3+yu+ax,\ F_2(x,y,z,u)=2xy^3+u^2z+a(y-1)$. De este modo, el sistema queda escrito como $F_1=1,\ F_2=0$.

Vemos que $F_1(P)=y_0u_0=1$ y que $F_2(P)=0$, independiente de los valores que tome el parámetro a, de modo que el punto P es solución del sistema.

Ahora bien, por el T.F.Im, de dicho sistema se pueden despejar localmente x,y si el jacobiano

$$\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}\right|_P \neq 0 \quad\longrightarrow\quad \begin{vmatrix} a & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} = a^2-2\neq 0$$

de modo que se pueden despejar las variables cerca de P si $a\neq\pm\sqrt{2}$.

b) Para $a\neq\pm\sqrt{2}$, el sistema de la parte anterior determina una función implícita $(x,y)=G(z,u)$, la cual satisface $G(0,1)=(0,1)$.

Por el T.F.In, dicha función G posee inversa local –en un entorno de $(0,1)--$ si su matriz jacobiana, $DG(0,1)$, es invertible; i.e.

$$\begin{vmatrix} x_z & x_u \\ y_z & y_u \end{vmatrix} = x_zy_u - x_uy_z\neq 0$$

Por la Regla de Cramer tenemos que, en el punto P,

$$x_z = -\frac{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,y)}}{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{a^2-2}$$

$$x_u = -\frac{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,y)}}{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}} = -\frac{a}{a^2-2}$$

$$y_z = -\frac{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,z)}}{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}} = -\frac{a}{a^2-2}$$

$$y_u = -\frac{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,u)}}{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}} = \frac{2}{a^2-2}$$

Por tanto,

$$\det\left(DG(0,1)\right) = \frac{2-a^2}{(a^2-2)^2} = \frac{1}{2-a^2} \neq 0 \quad \text{cuando } a \neq \pm\sqrt{2}$$

■

(8) Considere la ecuación $z^3 + z(1 - x^2 + 2x^4 + y^2) = 8$.

a) Demuestre que esta ecuación define localmente a $z = f(x,y)$ en torno a todo punto (x_0, y_0, z_0) que la satisface.

b) Determine todos los puntos críticos de las funciones $f(x,y)$ así despejadas.

c) Determine la naturaleza de dichos puntos críticos.

Solución:

a) Sea $F(x,y,z) = z^3 + z(1 - x^2 + 2x^4 + y^2)$. Entonces,

$$F_z = 3z^2 + (1 - x^2 + 2x^4 + y^2) = 3z^2 + \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{7x^2}{4} + y^2 > 0,\ \forall x$$

Por el T.F.Im, se deduce que localmente siempre se puede despejar $z = f(x,y)$ en torno a un punto que satisfaga la condición $F = 8$. La función despejada debe satisfacer $f > 0$, si no F sería negativa.

b) Derivamos implícitamente para obtener:

$$\begin{aligned} 3f^2 f_x + (1 - x^2 + 2x^4 + y^2) f_x + (8x^3 - 2x) f &= 0 \\ 3f^2 f_y + (1 - x^2 + 2x^4 + y^2) f_y + (2y) f &= 0 \end{aligned}$$

Los puntos críticos serán cuando $f_x = f_y = 0$. Dado que $f > 0$, los puntos críticos de f corresponden a $8x^3 - 2x = 2y = 0$, lo que da tres puntos: $(0,0)$, $(\pm 1/2, 0)$.

c) Debemos calcular f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} en los puntos críticos. Derivamos las ecuaciones anteriores, y usamos el hecho de que $f_x = 8x^3 - 2x = f_y = 2y = 0$:

$$\begin{aligned} 3f^2 f_{xx} + (1 - x^2 + 2x^4 + y^2) f_{xx} + (24x^2 - 2) f &= 0 \\ 3f^2 f_{yy} + (1 - x^2 + 2x^4 + y^2) f_{yy} + 2f &= 0 \\ 3f^2 f_{xy} + (1 - x^2 + 2x^4 + y^2) f_{xy} &= 0 \end{aligned}$$

Así, en los puntos críticos, se tiene:

$$f_{xx} = -\frac{(24x^2 - 2) f}{F_z}\ , \quad f_{yy} = -\frac{2f}{F_z}\ , \quad f_{xy} = 0$$

Salvo por el múltiplo de $f/F_z > 0$, las matrices Hessianas son:

- En $(0,0)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- En $(\pm 1/2, 0)$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Vemos que hay un punto silla en $(0,0)$, y un máximo local en $\left(\pm\frac{1}{2}, 0\right)$.

$\blacksquare$

4. Integrales Múltiples

4.1. Integrales dobles

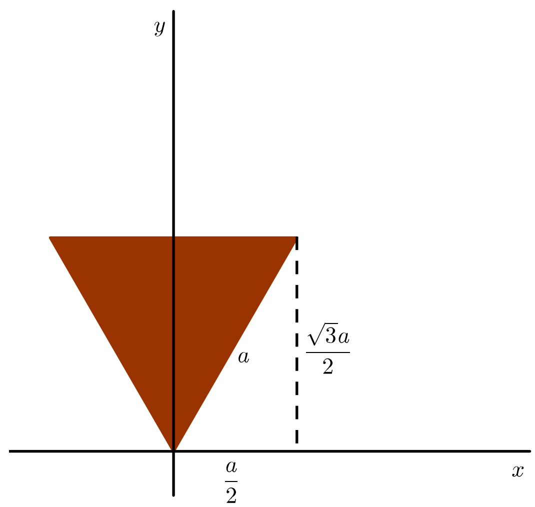
(1) *a*) Calcular la integral de la función $f(x,y)=x^2+y^2$ sobre la región determinada por un triángulo equilátero invertido de lado a, con uno de sus vértices apoyados en el origen.

b) Calcule $\displaystyle\iint\limits_{[1,2]\times[2,4]} ye^{xy}\,dxdy$

c) Evalúe $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dydx$

Solución:

a) La región de integración es la siguiente:



Notamos que, tanto la función como la región, poseen simetría axial con respecto al eje Y. De esta forma. solo calcularemos la integral en la porción de la región ubicada en el primer cuadrante:

$$\mathcal{R}=\left\{(x,y): 0\le x\le \frac{a}{2},\ x\sqrt{3}\le y\le \frac{\sqrt{3}a}{2}\right\}$$

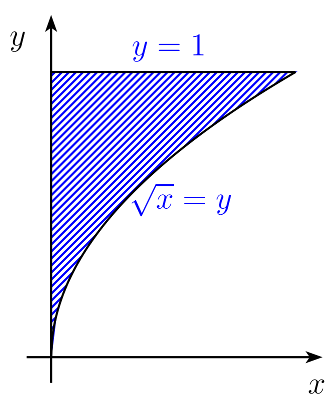
De esta forma,

$$\begin{aligned}
I &= 2\int_0^{a/2}\int_{x\sqrt{3}}^{a\sqrt{3}/2} x^2+y^2\ dydx \\
&= 2\int_0^{a/2}\left(yx^2+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{x\sqrt{3}}^{a\sqrt{3}/2}\ dx \\
&= 2\int_0^{a/2}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}x^2+\frac{a^3\sqrt{3}}{8}-2\sqrt{3}x^3\right)\ dx \\
&= 2\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}x^3+\frac{a^3\sqrt{3}}{8}x-\frac{\sqrt{3}}{2}x^4\right)\Bigg|_0^{a/2} \\
&= \frac{5\sqrt{3}a^4}{48}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{[1,2]\times[2,4]} ye^{xy}\ dxdy &= \int_2^4\left(\int_1^2 ye^{xy}\ dx\right)\ dy \\
&= \int_2^4 e^{2y}-e^y\ dy \\
&= \left(\frac{e^{2y}}{2}-e^y\right)\Bigg|_2^4 \\
&= \frac{e^8}{2}-\frac{e^4}{2}-e^4+e^2
\end{aligned}$$

c) Es claro que conviene integrar primero con respecto a x. La región de integración $\mathcal{R}$ está dada por:



Escrita en términos de y,

$$\mathcal{R}=\{(x,y):0\leq y\leq 1,\ 0\leq x\leq y^2\}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dydx &= \int_0^1 \int_0^{y^2} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy \\
&= \int_0^1 \sqrt{x^2+y^2}\Big|_0^{y^2} \, dy \\
&= \int_0^1 y\sqrt{y^2+1} - y \; dy \\
&= \left(\frac{(y^2+1)^{3/2}}{3} - \frac{y^2}{2} \right)\Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

■

(2) Calcular el volumen del sólido limitado por el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Solución:

Podemos ver que el sólido está limitado por dos “tapas”, dadas por las funciones:

$$f(x,y) = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\;, \quad g(x,y) = -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

donde (x, y) pertenecen a la región de integración dada por la elipse

$$\mathcal{E} = \left\{ (x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

El volumen estará dado por la integral de $f - g$ en la región $\mathcal{E}$. Usamos entonces la simetría del sólido para escribir que:

$$V = \iint\limits_{\mathcal{E}} f - g \; dA = 8c \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\; dydx$$

Consideremos ahora solo la integral en dy. Por simplicidad, llamamos $A = A(x) = \sqrt{1 - x^2/a^2}$. Así,

$$\int_0^{bA} \sqrt{A^2 - \frac{y^2}{b^2}}\; dy = A \int_0^{Ab} \sqrt{1 - \frac{y^2}{(Ab)^2}}\; dy$$

Ahora, estamos en cálculo de una variable, por lo que podemos usar *todas* las herramientas que manejamos. Hacemos el cambio de variable $y = Ab\sin t$, $dy = Ab\cos t dt$. Con esto, la integral anterior queda como:

$$A^2 b \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t}\cos t \; dt = A^2 b \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \; dt = \frac{A^2 b\pi}{4} = \frac{\pi b}{4}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

Entonces:

$$V = 2\pi bc \int_0^a 1 - \frac{x^2}{a^2}\, dx = \frac{4}{3}\pi abc$$

■

(3) *a*) Una integral doble de una función se reduce a la integral iterada:

$$\int_0^3 \int_{4y/3}^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)\, dxdy$$

Determine la región S e invierta el orden de integración.

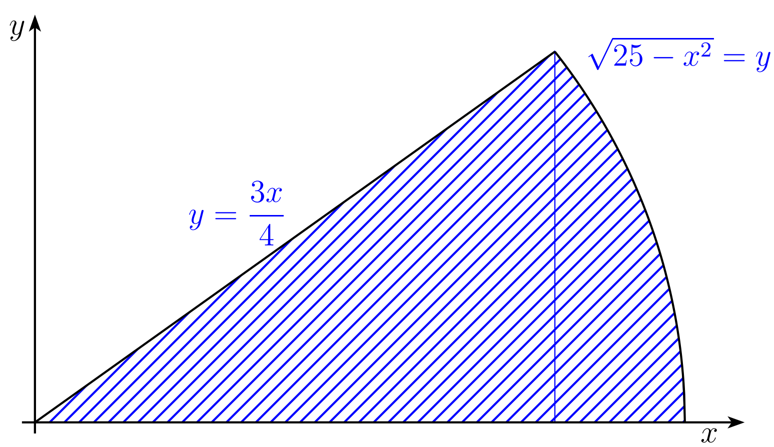
b) Un volumen limitado por una superficie $z = f(x,y)$ y por una región R en el plano XY se expresa de la siguiente forma:

$$V = \int_1^2 \int_x^{x^3} f(x,y)\, dydx + \int_2^8 \int_x^8 f(x,y)\, dydx$$

Dibujar la región R y expresar V con el orden de integración invertido. Calcular V cuando $f(x,y) = x^2/y$.

Solución:

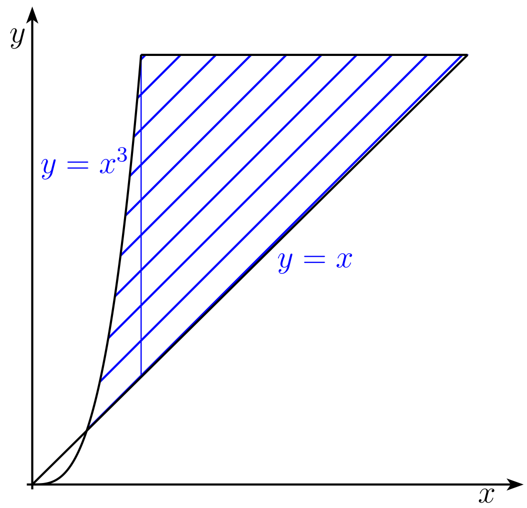
a) Para cada valor de y fijo entre 0 y 3, la integración respecto a x se efectúa entre $4y/3$ y $\sqrt{25-y^2}$. Por lo tanto, la región estará limitada –en x– entre esas dos curvas:



Cuando se invierte el orden de integración, la región se divide de la siguiente forma:

$$\int_0^4 \int_0^{3x/4} f(x,y)\, dydx + \int_4^5 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)\, dudx$$

b) Para graficar la región, simplemente nos guiamos por los límites de integración. Fijamos los límites en el eje X, y luego vemos los intervalos en los que se mueve y (las funciones de los intervalos). Haciendo ésto, llegamos a la siguiente región:



Luego podemos, del gráfico, deducir los límites para la integral con el orden de integración invertido:

$$V = \int_1^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^{y} f(x, y)\ dxdy$$

Ahora, si $f(x, y) = x^2/y$, podemos usar cualquiera de las dos expresiones para calcular la integral. Si usamos la primera, notamos que $1/y$ integrará $\ln y$; luego, evaluarla en los límites y volver a integral sería complicado. Pero, si usamos la segunda integral, solo encontramos polinomios:

$$V = \int_1^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^{y} f(x, y)\ dxdy = \int_1^8 \frac{1}{y}\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y}{3}\right)\ dy = \frac{1}{3}\int_1^8 y^2 - 1\ dy = \frac{490}{9}$$

■

(4) *a*) Calcule

$$I = \int_0^1 \int_{y^2}^{1} e^{x^2} y\ dxdy$$

b) Demuestre que

$$\int_0^a \int_0^y e^{m(a-x)} f(x)\ dxdy = \int_0^a (a - x)e^{m(a-x)} f(x)\ dx$$

Solución:

a) Notemos que la función en x no posee primitiva, por lo que debemos invertir el orden de integración. La región en cuestión es simple:

$$\mathcal{R} = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1,\ y^2 \leq x \leq 1\} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

Así,

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} e^{x^2} y \; dydx = \frac{1}{2}\int_0^1 xe^{x^2} = \frac{e-1}{4}$$

b) Dado que no podemos efectuar la integración en x por la presencia de f, intentaremos intercambiar el orden de integración. La región es:

$$\mathcal{R} = \{(x,y) : 0 \leq y \leq a, \; 0 \leq x \leq y\} = \{(x,y) : 0 \leq x \leq a, \; x \leq y \leq a\}$$

Así,

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^y e^{m(a-x)} f(x) \; dxdy &= \int_0^a \int_x^a e^{m(a-x)} f(x) \; dydx \\ &= = \int_0^a e^{m(a-x)} f(x) \int_x^a dy \; dx \\ &= = \int_0^a (a-x) e^{m(a-x)} f(x) \; dx \end{aligned}$$

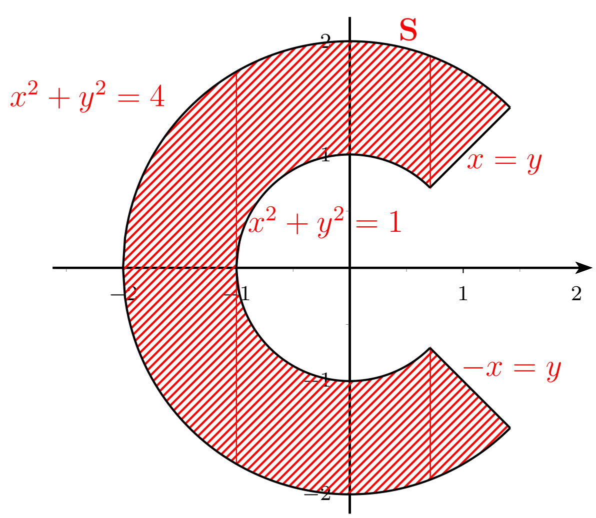
■

(5) [**Propuesto**] La siguiente suma de integrales representa la integral doble de una función $f(x,y)$ sobre una región $\mathcal{S}$. Identifique $\mathcal{S}$ e invierta el orden de integración:

$$\left\{ \int_{-2}^{-1} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} + \int_{-1}^{1/\sqrt{2}} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} + \int_{-1}^{1/\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} + \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_x^{\sqrt{4-x^2}} + \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-x} \right\} f(x,y) \; dydx$$

Solución:

La región en cuestión es la que sigue:



Si invertimos el orden de integración, encontraremos **7 regiones**, lo cual es mucho trabajo para quien escribe –pero queda propuesto al lector– y por eso es deseable encontrar otra forma de barrer la región. ¿Cómo se haría en polares? La región sería simplemente

$$\mathcal{S} : \{(r,\theta) : \pi/4 \leq \theta \leq 7\pi/4, \; 1 \leq r \leq 2\}$$

y es simplemente un rectángulo. Veremos, en el próximo apartado, que

$$\iint\limits_{\mathcal{S}_{x,y}} f(x,y)\ dxdy = \iint\limits_{\mathcal{S}_{r,\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\ rdrd\theta$$

pues el elemento de área varía según el radio/ángulo. En este caso, la integral es trivial; esto revela el enorme potencial del Teorema de Cambio de Variable. ■

4.2. Cambios de variable

(1) Sea R la región en las variables u, v dada por:

$$R = \{(u,v) : 1 \leq u \leq 2,\ 1 \leq v \leq 3\}$$

Grafique la imagen de R bajo la transformación $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$.

Solución:

De la segunda expresión al cuadrado, tenemos que:

$$y^2 = 4u^2v^2 \quad \longrightarrow \quad u^2 = \frac{y^2}{4v^2},\ v \neq 0$$

En la primera expresión:

$$x = \frac{y^2}{4v^2} - v^2$$

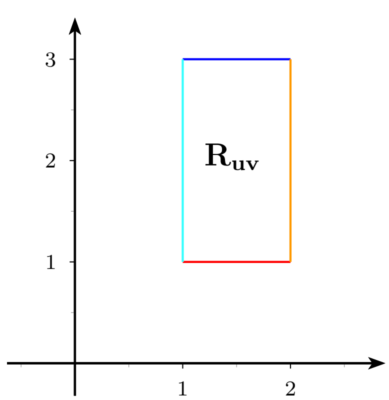
Evaluando las rectas $v = 1, 3$, tenemos las curvas en el plano XY dadas por, respectivamente, las siguientes parábolas:

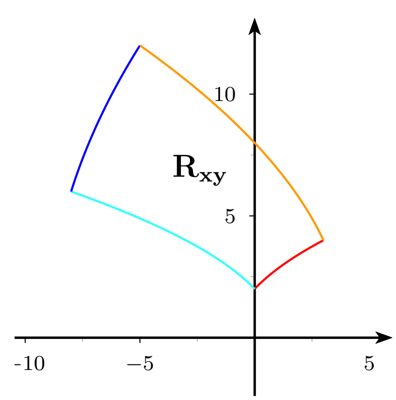
$$x = \frac{y^2}{4} - 1,\ y \in [2,4] \qquad \wedge \qquad x = \frac{y^2}{36} - 9,\ y \in [6,12]$$

Para las otras dos rectas de la frontera –$u = 1, u = 2$–, despejamos de manera análoga $v^2 = \dfrac{y^2}{4u^2}$ y por tanto:

$$x = -\frac{y^2}{4} + 1,\ y \in [2,6] \qquad \wedge \qquad x = -\frac{y^2}{16} + 4,\ y \in [4,12]$$

Finalmente, las regiones son:





■

(2) Calcule

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} \cos{(x-2y)^2}\ dA$$

donde $\mathcal{D}$ es la región delimitada por $x+2y=0$, $x-2y=1$ e $y=0$.

Solución:

Sean $u = x+2y$, $x-2y = v$. Con esta sustitución,

- la recta $x+2y=0$ es la recta $u=0$
- la recta $x-2y=0$ es la recta $v=1$
- la recta $y=0$ es la recta $u=v$
- $dA_{xy} = \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dA_{uv}$

Entonces, la región de integración en el plano UV es

$$\mathcal{R} = \{(u,v) : 0 \le u \le 1,\ u \le v \le 1\}$$

Por el T.F.In,

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1} = \left|\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right)\right|^{-1} = \frac{1}{4} \quad \longrightarrow \quad dA_{xy} = \frac{dA_{uv}}{4}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\mathcal{D}} \cos{(x-2y)^2}\ dA_{xy} &= \frac{1}{4}\iint\limits_{\mathcal{R}} \cos v^2\ dA_{uv} \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 \int_u^1 \cos v^2\ dvdu \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 \int_0^v \cos v^2\ dudv \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 v\cos v^2\ dv \ = \ \left.\frac{\sin v^2}{8}\right|_0^1 \\
&= \frac{\sin 1}{8}
\end{aligned}$$

■

(3) *a*) Sea A la región acotada por $x^2+4y^2=1$. Calcule

$$\iint\limits_{A} \frac{xy}{x^2+y^2}\ dxdy$$

b) Usando coordenadas polares, calcule

$$\iint\limits_R \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{x}\ dA$$

siendo $R = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq x\}$.

Solución:

a) Por la simetría del problema, sean $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$, y de este modo la integral queda como sigue:

$$\mathbf{I} = \iint\limits_{A'} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2}\ rdrd\theta = \iint\limits_{A'} \cos\theta\sin\theta\ rdrd\theta$$

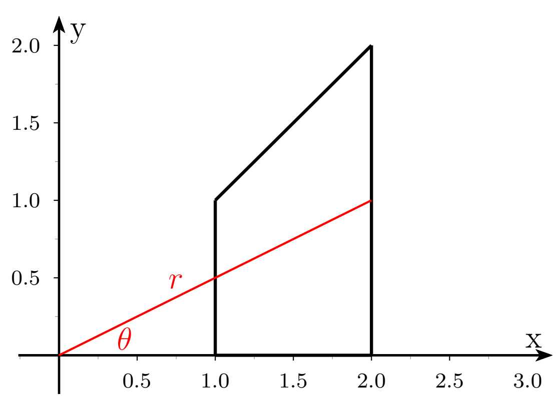
Ahora, debemos hallar A': en coordenadas polares, $x^2+4y^2 = 1$ se ve como

$$r^2\cos^2\theta + 4r^2\sin^2\theta = r^2 + 3r^2\sin^2\theta = 1 \quad \longrightarrow \quad r = \frac{1}{\sqrt{1+3\sin^2\theta}}$$

ya que $r \geq 0$. Así,

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{1+3\sin^2\theta}^{-1}} rdrd\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta\sin\theta}{1+3\sin^2\theta}\ d\theta \\
&= \left.\frac{\ln\left(1+3\sin^2\theta\right)}{12}\right|_0^{2\pi} = 0
\end{aligned}$$

b) La región R de integración es la que se muestra en la figura:



Observamos que el ángulo θ varía entre $\theta = 0$ –eje X– y $\theta = \pi/4$ –recta $x = y$–, y que el radio varía desde $\sec\theta$ –cuando $x = 1$– hasta $2\sec\theta$ –cuando $x = 2$– para un valor de θ dado. Por lo tanto, en coordenadas polares,

$$R \rightarrow R' = \{(r,\theta) : 0 \leq \theta \leq \pi/4,\ \sec\theta \leq r \leq \sec\theta\}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{R} \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{x}\, dA &= \iint\limits_{R'} \frac{r\sin\theta\sqrt{r^2}}{r\cos\theta}\, rdrd\theta \\
&= \int_0^{\pi/4} \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\left(\int_{\sec\theta}^{2\sec\theta} r^2\, dr\right) d\theta \\
&= \frac{7}{3}\int_0^{\pi/4} \frac{\sin\theta}{\cos^4\theta}\, d\theta \\
&= \frac{7}{9}\left(2\sqrt{2}-1\right)
\end{aligned}$$

■

(4) Sea $\mathcal{R}$ la región del plano en el cuarto cuadrante acotada por las rectas

$$x+y=0\ ,\quad x-y=1\ ,\quad y=0$$

Calcular $\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{R}} \frac{dxdy}{(x^2-y^2)^{2/5}}$.

Solución:

La región en cuestión corresponde a un triángulo rectángulo con vértice en el origen. Proponemos el siguiente cambio de variables:

$$u=x+y,\ v=x-y \quad\longrightarrow\quad \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{2}$$

Ahora,

- $x+y=0 \to u=0$
- $x-y=1 \to v=1$
- $y=0 \to u=v$
- $\mathcal{R}' = \{(u,v) : 0 \le u \le 1,\ u \le v \le 1\}$

Por lo tanto,

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2}\int_0^1\int_u^1 \frac{dvdu}{(uv)^{2/5}} = \frac{5}{6}\int_0^1 \frac{1-u^{3/5}}{u^{2/5}}\, du = \frac{25}{36}$$

■

(5) Evalúe la integral

$$\iint\limits_{4x^2-8x+y^2\le 0} \sqrt{4x^2+y^2}\, dxdy$$

Solución:

Completando cuadrados, notamos que la región de integración es la región encerrada por la elipse

$$(x-1)^2+\frac{y^2}{4}=1$$

Debemos decidir qué cambio de variables hacer: podemos elegir uno de modo tal que la región de integración sea trivial, u otro tal que el integrando sea fácil de trabajar. Optaremos por este último: sea $x=r\cos\theta,\ y=2r\sin\theta$. Con ello:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ 2\sin\theta & 2r\cos\theta\end{vmatrix}=2r$$

La elipse queda como sigue,

$$4x^2-8x+y^2=4r^2\cos^2\theta-8r\cos\theta+4r^2\sin^2\theta=0 \quad\longrightarrow\quad r=2\cos\theta$$

Elegimos $\theta\in[-\pi/2,\pi/2]$. Por tanto,

$$\iint\limits_{4x^2-8x+y^2\leq 0}\sqrt{4x^2+y^2}\ dxdy=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}4r^2\ drd\theta=\frac{32}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\theta\ d\theta=\frac{128}{9}$$

■

(6) Calcule la integral

$$\iint\limits_{\Omega}\frac{dxdy}{y^3}$$

donde Ω es la región delimitada por las curvas $y=\sin x$, $y=2\sin x$, $y=\cos x$ e $y=2\cos x$ que además satisface $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$. Para esto, se sugiere hacer

$$u=\frac{\sin x}{y}\ ,\quad v=\frac{\cos x}{y}$$

Solución:

Notemos que

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\cos x}{y} & -\dfrac{\sin x}{y^2}\\[2ex] -\dfrac{\sin x}{y} & -\dfrac{\cos x}{y^2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{y^3}$$

Como $u^2+v^2=\dfrac{1}{y^2}$, entonces:

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=y^3\quad\longrightarrow\quad\mathbf{I}=\iint\limits_{\Omega'}dudv$$

De la definición de la región,

$$\Omega' = \left\{ \frac{1}{2} \leq u \leq 1,\ \frac{1}{2} \leq v \leq 1 \right\}$$

Finalmente,

$$\mathbf{I} = \iint\limits_{\Omega'} dudv = \int_{1/2}^{1} \int_{1/2}^{1} dudv = \frac{1}{4}$$

$\blacksquare$

(7) [**Propuesto**] Calcule el valor de:

$$\mathbf{I_n} = \iint\limits_{\mathbb{R}^n} \cdots \int \exp\left(- \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \right) \, dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Solución:

Transformemos el integrando:

$$\exp\left(- \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \right) = \exp\left(-{x_1}^2 - {x_2}^2 - \ldots - {x_n}^2 \right) = \exp\left(-{x_1}^2 \right) \cdots \exp\left(-{x_n}^2 \right)$$

Dado que la expresión anterior pudo escribirse como una multiplicación de funciones de variables independientes, queda:

$$\begin{aligned}
\mathbf{I_n} &= \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-{x_1}^2\right) \, dx_1 \right) \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-{x_2}^2\right) \, dx_2 \right) \cdots \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-{x_n}^2\right) \, dx_n \right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-{x_i}^2\right) \, dx_i \right) \\
&= \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-x^2\right) \, dx \right)^n = \mathbf{I}^n
\end{aligned}$$

pues las variables de integración son mudas. Esta famosa integral se puede calcular como:

$$\mathbf{I} = \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-x^2\right) \, dx = \sqrt{\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-x^2\right) \, dx \right)^2} = \sqrt{\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-x^2\right) \, dx \right) \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-y^2\right) \, dy \right)}$$

$$\mathbf{I} = \sqrt{\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-x^2 - y^2\right) \, dxdy}$$

Pasando a coordenadas polares:

$$x = r\cos\theta \ , \quad y = r\cos\theta$$

con jacobiano de transformación $dxdy = rdrd\theta$. Para barrer $\mathbb{R}^2$, nos basta que $\theta \in (0, 2\pi)$ y $r \in (0, \infty)$. Entonces, la integral queda:

$$\mathbf{I}^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} re^{-r^2} \ drd\theta = -\pi e^{-r^2}\Big|_0^{\infty} = \pi$$

Luego, el valor final de la integral inicial es

$$\mathbf{I_n} = \sqrt{\pi^n}$$

■

4.3. Aplicaciones de integrales dobles

(1) Halle el volumen de la región interior al paraboloide $z = 16 - x^2 - 4y^2$ que queda sobre el plano $z = 2x + 8$.

Solución:

Si $\mathcal{R}_{xy}$ denota la proyección de la región sobre el plano XY, entonces –para cada $(x, y) \in \mathcal{R}_{xy}$– la variable z varía desde $2x + 8$ hasta $16 - x^2 - 4y^2$.

Por tanto, si V denota al volumen pedido,

$$V = \iint\limits_{\mathcal{R}_{xy}} \Big((16 - x^2 - 4y^2) - (2x + 8)\Big) \ dxdy = \iint\limits_{\mathcal{R}_{xy}} \Big(8 - x^2 - 2x - 4y^2\Big) \ dxdy$$

Ahora bien, $\mathcal{R}_{xy}$ es la región encerrada por la proyección sobre el plano XY de la curva de intersección entre ambas superficies. Calculamos dicha ecuación:

$$16 - x^2 - 4y^2 = 2x + 8 \quad \longleftrightarrow \quad (x + 1)^2 + 4y^2 = 9$$

Por tanto, $\mathcal{R}_{xy} = \{(x, y) : (x + 1)^2 + 4y^2 \leq 9\}$ y, completando cuadrados en el integrando, llegamos a que:

$$V = \iint\limits_{\mathcal{R}_{xy}} \Big(9 - (x + 1)^2 - 4y^2\Big) \ dxdy$$

Mediante el cambio de variables $(x + 1) = 3r\cos\theta$, $y = \dfrac{3}{2}\sin\theta$ la región $\mathcal{R}_{xy}$ es transformada en la región

$$\mathcal{D} = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1, \ 0 \leq \theta 2\pi\}$$

en el plano $R\Theta$. El integrando se transforma en $9(1-r^2)$. Por tanto,

$$V = \iint\limits_{\mathcal{D}} 9(1-r^2)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|\, drd\theta$$

Se verifica trivialmente que $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \dfrac{9r}{2}$. Finalmente,

$$\begin{aligned} V &= \frac{81}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r-r^3)\, drd\theta \\ &= \frac{81}{2}\cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{81\pi}{4} \end{aligned}$$

■

(2) Considere el sólido C limitado por $(ax)^2+(by)^2 = 1$ y $0 \le z \le 1$, y la superficie S dada por $z^2 = (ax)^2+(by)^2$. Sean V_1 el volumen bajo S e interior a C, y V_2 el volumen sobre S e interior a C. Demuestre que el cociente entre ambas cantidades es independiente de a y b.

Solución:

Consideremos el cambio de variables:

$$x = \frac{r\cos\theta}{a}\ , \quad y = \frac{r\sin\theta}{b} \quad \longrightarrow \quad \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \frac{r}{ab}$$

En estas coordenadas, podemos escribir el sólido C como

$$C = \{(r,\theta,z) : r\in[0,1],\ \theta\in[0,2\pi],\ z\in[0,1]\}$$

La superficie S queda definida por

$$S = \{(r,\theta,z) : r\in[0,1],\ \theta\in[0,2\pi],\ z = r\}$$

Así,

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_0^1\int_0^{2\pi} r\ \frac{r}{ab} d\theta dr = \frac{2\pi}{3ab} \\ V_C &= \int_0^1\int_0^{2\pi} \frac{r}{ab} d\theta dr = \frac{2\pi}{2ab} \end{aligned}$$

con V_C el volumen del sólido. Así, $V_2 = V_C - V_1 = \dfrac{\pi}{3ab}$. Finalmente,

$$\frac{V_1}{V_2} = 2$$

■

(3) Considere un disco de radio a, y un punto A ubicado en su frontera. La densidad de masa por unidad de área en cualquier punto P del disco es igual a la distancia $d(P, A)$. Encontrar:

a) La masa del disco

b) El centro de masa del disco.

c) El momento de inercia del disco, con respecto a un eje perpendicular que pasa por A.

Solución:

a) Para calcular la masa del disco, recurrimos simplemente a la definición. Dado que la densidad de masa depende de la distancia al punto A, colocaremos a éste en el origen. De esta forma, usando coordenadas polares, la circunferencia –sobre el eje X y apoyada en el origen– se escribe como $r = 2a\sin\theta$. La masa queda entonces (con ρ la densidad) como:

$$M = \iint_D dm = \iint_D \rho\ dA = \int_0^{\pi}\int_0^{2a\sin\theta} r\ rdrd\theta$$

Resolvemos la integral:

$$M = \frac{1}{3}\int_0^{\pi} 8a^3\sin^3\theta\ d\theta = \frac{8a^3}{3}\int_0^{\pi}\left(\sin\theta + \cos^2\theta\sin\theta\right)\ d\theta = \frac{8a^3}{3}\left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{32a^3}{9}$$

b) Hacemos lo mismo para el centro de masa del disco. Dado que conocemos $\bar{x}$ (que es cero, por simetría), solo calculamos $\bar{y}$:

$$\bar{y} = \frac{1}{M}\iint_D y\rho\ dm = \frac{9}{32a^3}\int_0^{\pi}\int_0^{2a\sin\theta} r\sin\theta r^3\ drd\theta$$

Resolvemos la integral:

$$\bar{y} = \frac{9}{32a^3}\int_0^{\pi} 4a^3\sin^4\theta\sin\theta\ d\theta = \frac{9a}{8}\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)^2\sin\theta\ d\theta = \frac{3a}{10}$$

c) Procedemos de la misma forma con el momento de inercia respecto al eje Z:

$$I_{AA} = \underset{D}{d^2\rho\ dm} = \int_0^{\pi}\int_0^{2a\sin\theta} r^2\ r\ rdrd\theta$$

con d la distancia entre el eje y los puntos interiores de la región. Así,

$$I_{AA} = \int_0^{\pi}\frac{32a^5}{5}\sin^5\theta\ d\theta = \frac{32a^5}{5}\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)^2\sin\theta\ d\theta = \frac{48a^2}{25}M$$

■

(4) Considere la región del plano:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 1\}$$

Determine los valores de a, b de modo que la integral

$$\iint\limits_{\Omega} 2x^2 + xy + y^2 - x - 2y + 17 \; dxdy$$

sea mínima.

Solución:

Lo primero que haremos será proponer el siguiente cambio de variables, que facilita el análisis:

$$u = x - a \ , \quad v = y - b$$

El jacobiano de transformación será 1. La integral entonces queda como:

$$\iint\limits_{\Omega} 2(u+a)^2 + (u+a)(v+b) + (v+b)^2 - (u+a) - 2(v+b) - 17 \; dudv$$

Podemos expandir, llegando a:

$$\iint\limits_{\Omega} 2u^2 + 4ua + 2a^2 + uv + av + ub + ab + v^2 + 2vb + b^2 - u - a - 2v - 2b + 17 \; dudv$$

Ahora, debemos minimizar. Primero, dividiremos la integral en dos partes: una que depende de a, b, y otra que no:

$$\iint\limits_{\Omega} f(u,v) \; dudv + \iint\limits_{\Omega} 4ua + 2a^2 + av + ub + ab + 2vb + b^2 - a - 2b \; dudv$$

Haremos una segunda transformación a coordenadas polares. Para efectos de notación, usaremos $S = \sin\theta, \; C = \cos\theta$, y con ello:

$$\iint\limits_{\Omega} f(u,v) \; dudv + \int_0^1 \int_0^{2\pi} 4arC + 2a^2 + arS + brC + ab + 2brS + b^2 - a - 2b \; rdrd\theta$$

Recordando que las integrales de potencias impares de senos y cosenos en un periodo se anulan, tenemos:

$$\iint\limits_{\Omega} f(u,v) \; dudv + \underbrace{\int_0^1 \int_0^{2\pi} 2a^2 + ab + b^2 - a - 2b \; rdrd\theta}_{\pi\left(2a^2+ab+b^2-a-2b\right)}$$

Ya sabemos como buscar mínimos: hacemos gradiente igual a cero. Con esto, y llamando F a la función anterior:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \pi(4a + b - 1) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = \pi(a + 2b - 2) = 0$$

Resolvemos fácilmente este sistema. Reemplazando la segunda ecuación en la primera, obtenemos que $b = 1$. Reemplazando, luego, este valor en la segunda, notamos que $a = 0$. Debemos comprobar que es un mínimo:

$$F_{aa} = 4\pi \ , \quad F_{bb} = 2\pi \ , \quad F_{ab} = \pi$$

Por lo tanto, el hessiano es positivo definido y, con esto, el punto es efectivamente un mínimo. ■

4.4. Integrales triples

(1) La siguiente integral iterada representa la integral triple de la función $f = f(x, y, z)$ en una región $\mathcal{R}$:

$$\int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^{1-x} f(x, y, z) \ dzdydx$$

a) Escriba esta integral triple como integral iterada en orden $dzdxdy$.

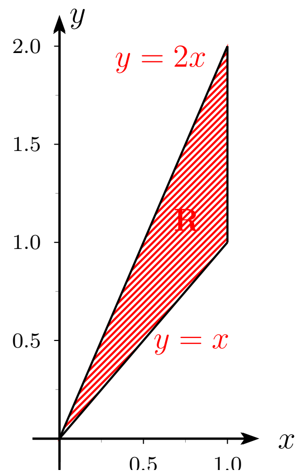
b) Escriba ahora esta integral triple como integral iterada en orden $dxdydz$.

Solución:

a) Podemos escribir la integral triple como

$$\int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^{1-x} f(x, y, z) \ dzdydx = \iint\limits_R \left(\int_0^{1-x} f(x, y, z) \ dz \right) \ dydx$$

donde R es la región en el plano XY que debemos determinar: los valores de x están limitados por 0 y 1, mientras que las cotas de y, para un x fijo, están dadas por x y $2x$. Así, la región queda dibujada como sigue:



Para invertir el orden, deberemos separar la integral $\mathbf{I}$ en una suma de dos integrales:

$$\mathbf{I} = \int_0^1 \int_{y/2}^{y} \int_0^{1-x} f(x, y, z)\ dzdxdy + \int_1^2 \int_{y/2}^{1} \int_0^{1-x} f(x, y, z)\ dzdxdy$$

b) Por la representación original de la integral, la región $\mathcal{R}$ puede escribirse mediante las siguientes desigualdades:

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \le x \le & 1 \\ x \le y \le & 2x \\ 0 \le z \le & 1 - x \end{cases}$$

Juntando la primera y tercera desigualdad, notamos que:

$$0 \le z \le 1$$

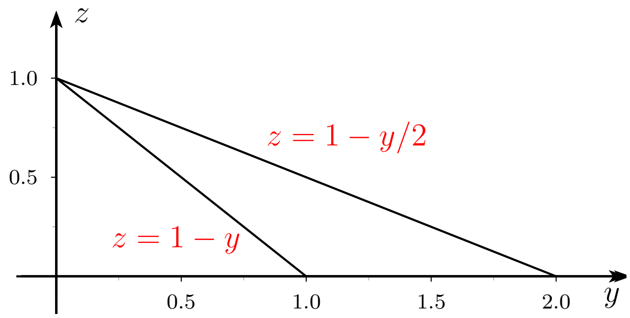
De manera análoga, las desigualdades primera y segunda muestran que $y \ge 0$, mientras que las dos últimas implican que $y \le 2x \le 2(1 - z)$. Luego,

$$0 \le y \le 2(1 - z)$$

Ahora bien, de las dos primera desigualdades –tal como se vio en el apartado anterior– se cumple que $x \ge y/2$. Por las tres desigualdades, tenemos que $x \le 1,\ x \le y$ y $x \le 1 - z$. Como $z \in [0, 1]$, la tercera condición garantiza la primera, de modo que se puede escribir:

$$\frac{y}{2} \le x \le \text{mín}\,\{y, 1 - z\}$$

La siguiente figura muestra el triángulo que representa la proyección de $\mathcal{R}$ sobre el plano YZ



Observamos que, bajo la línea $z = 1 - y$, el mínimo es y (simplemente evaluando puntos); mientras que, sobre la línea, es $1 - z$. Así, $\mathcal{R}$ se puede escribir como la unión de las regiones

$$\mathcal{R}_1 = \begin{cases} 0 \le z \le 1 \\ 0 \le y \le 1 - z \\ y/2 \le x \le y \end{cases} \qquad \wedge \qquad \mathcal{R}_2 = \begin{cases} 0 \le z \le 1 \\ 1 - z \le y \le 2(1 - z) \\ y/2 \le x \le 1 - z \end{cases}$$

Finalmente,

$$\mathbf{I} = \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_{y/2}^{y} f(x, y, z)\, dxdydz + \int_0^1 \int_{1-z}^{2(1-z)} \int_{y/2}^{1-z} f(x, y, z)\, dxdydz$$

■

(2) Calcular:

$$\iiint_\Omega \sin\left(\frac{\pi}{72\sqrt{2}}\left(7x^2 - 4xy + 6y^2 - 4yz + 5z^2\right)^{3/2}\right)\, dxdydz$$

donde $\Omega = \{(x, y, z) : 7x^2 - 4xy + 6y^2 - 4yz + 5z^2 \le 18\}$.

Solución:

Este tipo de problemas es bastante típico: completemos cuadrados.

$$\begin{aligned} 7x^2 - 4xy + 6y^2 - 4yz + 5z^2 &= \left(7x^2 - 4xy + \frac{4}{7}y^2\right) + \left(5z^2 - 4yz + \frac{4}{5}y^2\right) + \frac{162}{35}y^2 \\ &= \left(\sqrt{7}x - \frac{2}{\sqrt{7}}y\right)^2 + \frac{162}{35}y^2 + \left(\sqrt{5}z - \frac{2}{\sqrt{5}}y\right)^2 \end{aligned}$$

Entonces, tomamos las variables:

$$u = \sqrt{7}x - \frac{2}{\sqrt{7}}y\ , \quad v = \sqrt{\frac{162}{35}}y\ , \quad w = \sqrt{5}z - \frac{2}{\sqrt{5}}y$$

Ahora, queremos el jacobiano de la transformación. Calculamos:

$$\frac{\partial(u,v,z)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \sqrt{7} & -\frac{2}{\sqrt{7}} & 0 \\ & & \\ 0 & \sqrt{\frac{162}{35}} & 0 \\ & & \\ 0 & \sqrt{5} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} = -\frac{18\sqrt{2}}{5} \longrightarrow \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \left|\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right|^{-1} = \frac{5\sqrt{2}}{36}$$

La región de integración se transforma es

$$u^2 + v^2 + w^2 \leq 18$$

Escribimos de nuevo la integral:

$$\frac{5\sqrt{2}}{36} \iiint\limits_{\Omega} \sin\left(\frac{\pi}{72\sqrt{2}}\left(u^2+v^2+w^2\right)^{3/2}\right)\, dudvdw$$

Hacemos un nuevo cambio a coordenadas esféricas:

$$\begin{array}{rcl} u & = & \rho\cos\theta\sin\phi \\ v & = & \rho\sin\theta\sin\phi \\ w & = & \rho\cos\phi \end{array} \longrightarrow \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} = \rho^2\sin\phi$$

La integral queda como:

$$\mathbf{I} = \frac{5\sqrt{2}}{36} \iiint\limits_{\Omega} \sin\left(\frac{\pi}{72\sqrt{2}}\left(\rho^2\right)^{3/2}\right)\rho^2\sin\phi\; d\rho d\theta d\phi$$

donde Ω es la región dada por $\rho \leq \sqrt{18}$. Resolvemos la integral:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{I} & = & 2\pi\cdot\frac{5\sqrt{2}}{36}\left(\int_0^{\sqrt{18}} \sin\left(\frac{\pi}{72\sqrt{2}}\rho^3\right)\rho^2\; d\rho\right)\left(\int_0^{\pi}\sin\phi\; d\phi\right) \\ & = & \frac{5\sqrt{2}\pi}{9}\left(-\frac{24\sqrt{2}}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{72\sqrt{2}}\rho^3\right)\right)\Bigg|_0^{\sqrt{18}} \\ & = & \frac{40\sqrt{2}}{3} + \frac{80}{3} \end{array}$$

■

(3) Considere la región R del espacio limitada al primer octante y

$$x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{2}} + z \leq 1$$

Calcule el volumen de R.

Solución:

Tomemos el siguiente cambio de variables,

$$u = x^{1/3} \ , \quad v = y^{1/2} \ , \quad w = z$$

con jacobiano de transformación:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} 3u^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2v & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6u^2v$$

La región de integración se transforma en $u+v+w \leq 1$. Con esto, el volumen es:

$$\begin{aligned} V &= \iiint\limits_R 6u^2v \ dudvdw \ = \ \int_0^1 \int_0^{1-u} \int_0^{1-u-v} 6u^2v \ dwdvdu \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-u} (1-u-v)6u^2v \ dvdu \\ &= \int_0^1 6u^2 \int_0^{1-u} v - uv - v^2 \ dv \ du \\ &= \int_0^1 6u^2 \frac{(1-u)^3}{6} \ du \\ &= \frac{1}{60} \end{aligned}$$

■

(4) *a*) Calcular el volumen de la región acotada por

$$z = 3x+5y+3 \ , \quad z = 3x-5y-10 \ , \quad y = 0 \ , \quad x = 3 \ , \quad y = 2x$$

b) Escriba la integral

$$\mathbf{I} = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{1-x^2-y^2} f(x,y,z) \ dzdydx$$

como una integral iterada en el orden $dydzdx$.

Solución:

a) Si $\mathcal{T}$ es el triángulo, en el plano XY, delimitado por las rectas $y=0, \ x=3, \ y=2x$, entonces el volumen de la región es

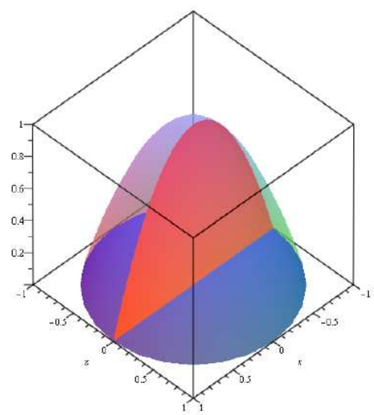
$$V = \iint\limits_{(x,y)\in\mathcal{T}} \int_{3x-5y-10}^{3x+5y+3} dzdxdy$$

El $\triangle\mathcal{T}$ es la región $0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 2x$. Así,

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^3 \int_0^{2x} \int_{3x-5y-10}^{3x+5y+3} dzdxdy \\
&= \int_0^3 \int_0^{2x} 10y + 13\ dydx \\
&= \int_0^3 20x^2 + 26x\ dx \\
&= 297
\end{aligned}$$

b) La región S de integración es $x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2$, que corresponde a la porción del cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$ comprendida entre el plano $z = 0$ y el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$.
La proyección del sólido S sobre el plano XZ es la región

$$R = \{(x, z) : -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1 - x^2\}$$



El sólido S se puede parametrizar como $(x, z) \in R$, $-\sqrt{1 - x^2 - z} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2 - z}$. Así,

$$\mathbf{I} = \iint\limits_{(x,z)\in R} \int_{-\sqrt{1-x^2-z}}^{\sqrt{1-x^2-z}} f(x, y, z)\ dydzdx = \int_{-1}^{1} \int_0^{1-x^2} \int_{-\sqrt{1-x^2-z}}^{\sqrt{1-x^2-z}} f(x, y, z)\ dydzdx$$

■

(5) Se considera el sólido S descrito por:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0, 1],\ x^2 + y^2 - 2x(1 - z) \leq 0\}$$

Asumiendo que la distribución de masa μ dentro de S es tal que $\mu(x, y, z) = 1 - z$, determinar:

a) la masa de S.

b) la ubicación del centro de masa de S.

Solución:

a) Por definición, la masa de S es:

$$M = \iiint_S \mu(x,y,z)\ dxdydz = \iiint_S (1-z)\ dxdydz$$

Observamos que, para un z fijo en el intervalo $[0,1]$, la sección S_z definida por:

$$S_z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - 2x(1-z) \leq 0\}$$

es un disco centrado en el punto $(0, 1-z, z)$ y de radio $(1-z)$. Por lo tanto, su área es $A(S_z) = \pi(1-z)^2$. Integrando,

$$\begin{aligned} M &= \int_0^1 (1-z) \left(\iint_{S_z} dxdy \right)\ dz = \int_0^1 (1-z) A(S_z)\ dz \\ &= \pi \int_0^1 (1-z)^3\ dz = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

b) Las coordenadas del centro de masa $\overline{\mathbf{X}} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ se deducen inmediatamente. Aplicamos el siguiente cambio de variables a coordenadas cilíndricas:

$$(r, \theta, z) \mapsto (x,y,z) = (1 - z + r\cos\theta, r\sin\theta, z)$$

Integrando se obtiene:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{M} \iiint_S x\mu(x,y,z)\ dxdydz \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{2\pi} (1-z)(r\cos\theta + 1 - z)\ rd\theta drdz = \frac{4}{5} \\ \bar{y} &= \frac{1}{M} \iiint_S y\mu(x,y,z)\ dxdydz \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{2\pi} (1-z)(r\sin\theta)\ rd\theta drdz = 0 \\ \bar{z} &= \frac{1}{M} \iiint_S z\mu(x,y,z)\ dxdydz \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{2\pi} z(1-z)\ rd\theta drdz = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

El centro de masa es:

$$\overline{\mathbf{X}} = \left(\frac{4}{5}, 0, \frac{1}{5} \right)$$

■

(6) Determine el volumen del sólido encerrado por las superficies

$$z=\sqrt{x^2+y^2}\ ,\quad z=\sqrt{3(x^2+y^2)}\ ,\quad x^2+y^2+z^2=1\ ,\quad z=2$$

Solución:

Lo más simple es usar coordenadas esféricas:

$$\begin{array}{rcl} x &=& r\cos\theta\sin\phi \\ y &=& r\sin\theta\sin\phi \\ z &=& r\cos\phi \end{array} \quad\longrightarrow\quad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}=r^2\sin\phi$$

En coordenadas esféricas, la ecuación del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ es:

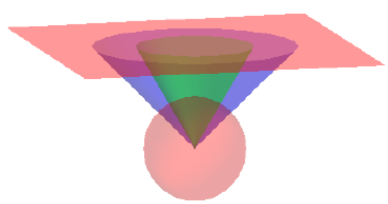
$$\begin{array}{rcl} r\cos\phi &=& \sqrt{(r\cos\theta\sin\phi)^2+(r\sin\theta\sin\phi)^2} \\ &=& \sqrt{r^2\sin^2\phi} \\ &=& r\sin\phi \\ & \Updownarrow & \\ \tan\phi &=& 1 \\ & \Updownarrow & \\ \phi &=& \dfrac{\pi}{4} \end{array}$$

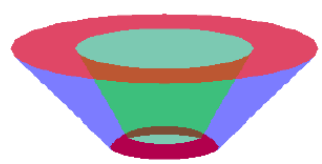
De la misma manera, la ecuación del segundo cono es $\tan\phi=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leftrightarrow\phi=\dfrac{\pi}{6}$.

El plano $z=2$ en esféricas es $r=\dfrac{2}{\cos\phi}$.

Así, el sólido viene dado por

$$1\le r\le\frac{2}{\cos\phi},\ 0\le\theta\le 2\pi,\ \frac{\pi}{6}\le\phi\le\frac{\pi}{4}$$





El volumen del sólido es:

$$\begin{array}{rcl} V &=& \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/4}\int_1^{2/\cos\phi} r^2\sin\phi\ drd\phi d\theta \\ &=& \displaystyle\frac{2\pi}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/4}\sin\phi\left(\frac{8}{\cos^3\phi}-1\right)\ d\phi d\theta \\ &=& 2\pi\left(\dfrac{1}{6}\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)+\dfrac{8}{9}\right) \end{array}$$

■

5. Integrales de Línea y Teorema de Green

5.1. Integrales de línea

(1) *a*) Calcule

$$\oint_\gamma (3y^2 - 2x)\ ds$$

sobre la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$, recorrida positivamente.

b) Sea $\vec{F}(x, y) = (x+y)\hat{\imath}+(x-y)\hat{\jmath}$. Calcular $\displaystyle\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ con γ la curva, recorrida en sentido positivo entre los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$, de ecuación $(bx)^2 + (ay)^2 = (ab)^2$.

Solución:

Recordemos que:

$*$ Una integral de línea de un campo escalar f sobre una curva γ (recorrida positivamente) se define como:

$$\int_\gamma f\ ds = \int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\ dt$$

donde $\gamma(t)$ es la parametrización de la curva, y $t \in [a, b]$ la recorre completamente.
$*$ Una integral de línea respecto a un campo vectorial se define como:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ dt$$

a) Parametrizamos la curva de la forma $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, con $t \in [0, 2\pi)$. Notar que el parámetro recorre la curva en contra de las agujas del reloj (orientación positiva). La longitud de largo está dada por

$$ds = \left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|\ dt = \sqrt{9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t}\ dt = 3|\cos t \sin t|\ dt$$

Entonces, por definición:

$$\oint_\gamma (3y^2 - 2x)\ ds = \int_0^{2\pi} (3\sin^6 t - 2\cos^3 t)3|\cos t \sin t|\ dt = \frac{9}{2}$$

Notar que se usó valor absoluto pues la norma es siempre semi-definida positiva.

b) Comencemos con la parametrización de la curva. Estamos sobre una elipse, por lo que la curva se puede escribir como sigue:

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t \quad \longrightarrow \quad d\vec{r} = \gamma' t\ dt = (-a\sin t, b\cos t)\ dt$$

El parámetro satisface $t \in [0, \pi]$. La integral será, entonces,

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^\pi (a\cos t + b\sin t, a\cos t - b\sin t) \cdot (-a\sin t, b\cos t)\ dt$$

Resolviendo,

$$\int_0^\pi \Big(-(a^2+b^2)\cos t \sin t + ab(-\sin^2 t + \cos^2 t)\Big)\ dt = -\int_0^\pi \frac{a^2+b^2}{2}\sin 2t - ab\cos 2t\ dt$$

Como las integrales de potencias impares de senos y cosenos en sus periodos dan cero, la integral es nula.

$\blacksquare$

(2) Sea γ la curva que se produce de la intersección del plano $y = x$ con el paraboloide $z = x^2 + y^2$, contenida en el primer octante. Sea $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ el campo dado por

$$F_1 = \frac{\cos y}{2(1+2z)}\ , \quad F_2 = \frac{\cos x}{2(1+2z)} + \sin y\ , \quad F_3 = \frac{y\cos x}{1+2z}$$

a) Determine todos los puntos $\vec{p} \in \gamma$ para los cuales el trabajo realizado por $\vec{F}$ a lo largo de γ desde el origen $(0,0,0)$ hasta $\vec{p}$ sea igual a 1.

b) Sean $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ dos puntos cualesquiera de la parte anterior. Determinar el trabajo realizado por $\vec{F}$ a lo largo de γ desde $\vec{p}_1$ hasta $\vec{p}_2$.

Solución:

a) Primero que todo, parametrizamos la curva. Eligiendo a t como parámetro,

$$\gamma:\ \vec{r}(t) = (t, t, 2t^2),\ t \in \mathbb{R}$$

Luego, un punto $\vec{p} \in \gamma$ es de la forma $(a, a, 2a^2)$ para algún $a > 0$, y el trabajo realizado por el campo a lo largo de la curva es:

$$W = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^a \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\ dt$$

Como $\vec{r}\,'(t) = (1, 1, 4t)$ y

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \left(\frac{\cos t}{2(1+4t^2)}, \frac{\cos t}{2(1+4t^2)} + \sin t, \frac{t\cos t}{1+4t^2}\right)$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^a \left(\frac{2\cos t + 8t^2\cos t}{2(1+4t^2)} + \sin t\right)\ dt \\ &= \int_0^a \cos t + \sin t\ dt \\ &= 1 + \sin a - \cos a \end{aligned}$$

Por tanto,

$$W = 1 \iff \cos a = \sin a \iff a = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

b) Si ambos puntos corresponde a valores a_1, a_2 del parámetro –con a en el conjunto de valores hallados en el apartado anterior– entonces el trabajo W realizado por el campo sobre la curva entre ambos puntos es:

$$\begin{aligned} W &= \int_{a_1}^{a_2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\ dt \\ &= \int_{0}^{a_2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\ dt - \int_{0}^{a_1} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\ dt \\ &= 1 - 1 \ = \ 0 \end{aligned}$$

por la definición de los a_k. Luego, el trabajo realizado es **nulo**.

■

(3) Sea $\vec{F} = (e^x \sin y, e^x \cos y, z^2)$.

a) Demuestre que el campo es conservativo y encuentre una función potencial.

b) Se define $f(x, y, z) = \displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(x,y,z)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Calcule $f(x, y, z)$ para todo punto sobre una curva arbitraria C y verifique que f es una función potencial.

Solución:

a) Basta encontrar $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\vec{F} = \nabla g$ para demostrar el carácter conservativo del campo.
Si $\nabla g = \vec{F}$, entonces $g_x = e^x \sin y$, $g_y = e^x \cos y$ y $g_z = z^2$.

- Si $g_x = e^x \sin y$, g debe ser de la forma $g(x, y, z) = e^x \sin y + h(y, z)$ para alguna función h por determinar.
- Por otra parte, como $g_y = e^x \cos y = e^x \cos y + h_y$, es claro que h solo depende de z.
- Como $g_z = h'(z) = z^2$, entonces $h(z) = \dfrac{z^3}{3} + K$.

Tomando una solución particular,

$$g(x, y, z) = e^x \sin y + \frac{z^3}{3}$$

b) Sabemos que si $\vec{F} = \nabla g$, entonces para toda curva C que una los puntos (a, b, c) y (m, n, p),

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = g(m, n, c) - g(a, b, c)$$

Por lo tanto, $f(x, y, z) = g(x, y, z) - g(1, 1, 1) = e^x \sin y + \dfrac{z^3}{3} - e \sin 1 - \dfrac{1}{3}$. Es claro que $\nabla f = \nabla g = \vec{F}$.

■

(4) Sea $\mathcal{C}$ la curva dada por la intersección del plano $x = y$ con el paraboloide $z = x^2 + y^2$. Calcule la longitud del arco de la curva desde el origen $(0,0,0)$ hasta el punto $(1,1,2)$.

Solución:

Una posible parametrización de la curva es $\vec{r}(t) = (t, t, 2t^2)$, $0 \leq t \leq 1$. La longitud de arco es:

$$L = \int_0^1 \|\vec{r}\,'(t)\| \, dt = \int_0^1 \sqrt{1^2 + 1^2 + (4t)^2} \, dt = \sqrt{2} \int_0^1 \sqrt{1 + 8t^2} \, dt$$

Sea $\sqrt{8}t = \sinh u$, de modo tal que la integral $\mathbf{I} = \displaystyle\int \sqrt{1 + 8t^2} \, dt$ queda como sigue:

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} &= \frac{1}{\sqrt{8}} \int \sqrt{1 + \sinh^2 u} \cosh u \, du \;=\; \frac{1}{\sqrt{8}} \int \cosh^2 u \, du \\
&= \frac{1}{4\sqrt{8}} \int \left(e^u + e^{-u}\right)^2 du \;=\; \frac{1}{4\sqrt{8}} \int e^{2u} + 2 + e^{-2u} \, du \\
&= \frac{1}{4\sqrt{8}} \left(\frac{e^{2u}}{2} + 2u - \frac{e^{-2u}}{2} \right)
\end{aligned}$$

Notar que $t = 0 \to u = 0$, y que $t = 1$ significa que:

$$\sinh u = \sqrt{8} \;\longrightarrow\; u = \operatorname{arcsinh} \sqrt{8} = \ln\left(\sqrt{8} + \sqrt{(\sqrt{8})^2 + 1}\right) = \ln\left(2\sqrt{2} + 3\right)$$

Así, como $\mathbf{I}(0) = 0$,

$$L = \sqrt{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{8} \ln\left(2\sqrt{2} + 3\right) \right)$$

■

5.2. Teorema de Green

(1) Sea

$$\vec{F} = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{-x}{x^2 + y^2} \right)$$

Sea γ una curva de Jordan (curva continua, cerrada y simple) regular a trozos situada en $\Omega = \mathbb{R}^2 - (0,0)$. Hallar todos los posibles valores de la integral de línea de $\vec{F}$ a lo largo de γ.

Solución:

Recordemos que:

Teorema (de Green). Sean $P(x,y), Q(x,y)$ tales que $\vec{F} = (P,Q)$ dos funciones de clase $\mathcal{C}^1$ en $R \cup \gamma$, donde γ es una curva de Jordan $\mathcal{C}^1$ y R es la región abierta acotada por γ. Si la curva está orientada positivamente, entonces:

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_\gamma P\ dx + Q\ dy = \iint_R \Big[Q_x - P_y\Big]\ dxdy$$

En un sentido general,

$$\oint_{\partial \mathcal{R}} P\ dx + Q\ dy = \iint_{\mathcal{R}} \Big(Q_x - P_y\Big)\ dA$$

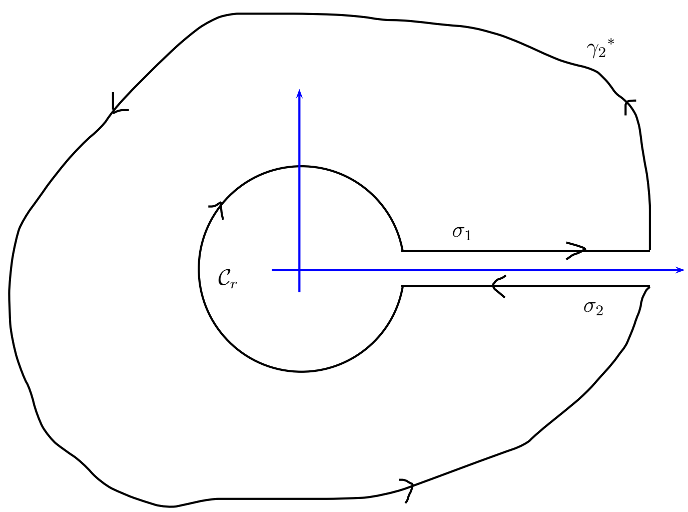
con $\partial \mathcal{R}$ la frontera de $\mathcal{R}$ orientada con la región a mano izquierda.

Notemos que el campo no es conservativo en Ω, pese a que $\nabla \times \vec{F} = 0$ y $P_y = Q_x$.

- Sea γ_1 una curva de Jordan –tal que $\partial R_1 = \gamma_1$– que no encierra el origen. Entonces, por el teorema de Green:

$$\int_{\gamma_1} P\ dx + Q\ dy = \iint_{R_1} \Big(Q_x - P_y\Big)\ dxdy = 0$$

- Sea γ_2 una curva de Jordan que sí encierra el origen. P, Q no están definidos en R_2 puesto que la singularidad del campo está dentro. Para calcular el valor de la integral de línea, hacemos:



con $\Gamma = \gamma_2{}^* \cup \sigma_2 \cup \mathcal{C}_r \cup \sigma_2$, con $\mathcal{C}_r$ recorrido en sentido horario. Así,

$$\oint_\Gamma P\ dx + Q\ dy = \iint_{R_2{}^*} \Big(Q_x - P_y\Big)\ dxdy = 0$$

Tomando el límite cuando $\sigma_1 \to \sigma_2$, tenemos –por la cancelación de las integrales sobre los canales interiores– que:

$$\int\limits_{\gamma_2+\mathcal{C}_r} P\ dx + Q\ dy = 0 \quad \longrightarrow \quad \int\limits_{\circlearrowleft} P\ dx + Q\ dy = \int\limits_{\gamma_2} P\ dx + Q\ dy$$

Ahora bien, $\mathcal{C}_r$ puede ser parametrizado como $(r\cos t, r\sin t)$, $t \in [0, 2\pi)$. Así,

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (\sin t, -\cos t) \cdot (-\sin t, \cos t)\ dt = -2\pi$$

- Ahora, nos queda el mismo caso anterior pero con la curva recorrida en sentido contrario, cuya integral resulta 2π.

$\blacksquare$

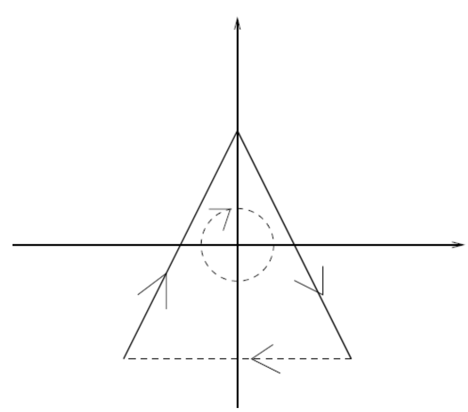
(2) Calcule $\displaystyle\int_\gamma P\ dx + Q\ dy$ si

$$P(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}\ , \quad Q(x,y) = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

y γ es la unión de los trazos rectos γ_1 y γ_2, donde γ_1 va desde $(-1,-1)$ a $(0,1)$ y γ_2 va desde $(0,1)$ hasta $(1,-1)$.

Solución:

Una opción es calcular las integrales sobre cada trazo, pero en este caso haremos lo siguiente: cerraremos el contorno, dibujando γ_3 desde $(-1,-1)$ hasta $(1,-1)$, para aplicar el Teorema de Green. Sea D la región encerrada por estas tres curvas. Notamos que P, Q se indefinen en $(0,0) \in D$; eliminaremos dicho problema mediante la adición de un círculo γ_ϵ de radio ϵ, orientado como la figura.



Ya calculamos, en la pregunta anterior, que

$$\int\limits_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} P\ dx + Q\ dy = \int\limits_{\gamma_1+\gamma_2} P\ dx + Q\ dy + \int\limits_{\gamma_3} P\ dx + Q\ dy = 2\pi$$

Ahora bien, $\gamma_3 : (-t, -1)$, $t \in [-1, 1]$. Por tanto,

$$\int\limits_{\gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^{1} \frac{-1}{1+t^2}\ dt = -\arctan(t)\Big|_{-1}^{1} = -\frac{\pi}{2}$$

Finalmente,

$$\int\limits_{\gamma_1+\gamma_2} P\ dx + Q\ dy = 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

■

(3) *a*) Calcule la integral de línea

$$\mathbf{I} = \int_\gamma -y\ dx + \Big(x + \arctan(1+y^2)\sinh^2 y\Big)\ dy$$

donde γ es la porción del círculo $x^2 + y^2 = 1$ con $y \geq 0$ orientado positivamente.

b) Calcule

$$\mathbf{S} = \int_\gamma \Big(e^{-x^2/2} - y\Big)\ dx + \Big(e^{-y^2/2} + x\Big)\ dx$$

siendo γ el contorno de la región entre las curvas $x^2+y^2 = 25$, orientada en el sentido contrario a los punteros del reloj, y $x^2 + 4y^2 = 4$, orientada en el sentido de los punteros.

Solución:

a) Pongamos $P = -y$, $Q = x + \arctan(1+y^2)\sinh^2 y$. Sea D la región $x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0$. Si borde ∂D consiste del semicírculo $x^2 + y^2 = 1$ con $y \geq 0$ orientado en la dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj, que denotaremos por γ concatenado con el intervalo $[-1, 1]$ recorrido de izquierda a derecha, denotado por ℓ.

Para el campo dado, se cumple que:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2$$

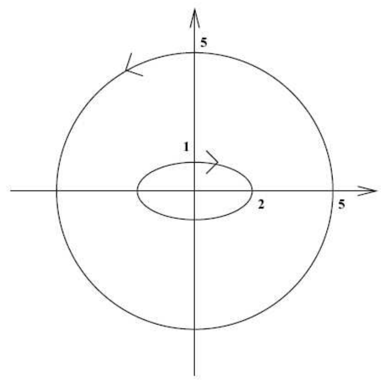
Aplicando el **Teorema de Green** se obtiene que:

$$\iint\limits_D 2\ dxdy = \int\limits_\gamma \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ dt + \int_{-1}^{1} \vec{F}(s,0) \cdot (1,0)\ ds$$

O sea,

$$\mathbf{I} = \iint\limits_D 2\ dxdy - 0 = 2 \cdot A(D) = \pi$$

b) La región D (encerrada por ambas curvas) y su contorno se muestran en la siguiente figura:



Llamamos γ_1 al círculo y γ_2 a la elipse, orientados tal como en la figura. También escribimos $P(x,y) = e^{-x^2/2} - y$ y $Q(x,y) = e^{-y^2/2} + x$ y observamos que ambas funciones son de clase $\mathcal{C}^1$ en todo el plano, y que el contorno está orientado positivamente respecto a D.
Por el Teorema de Green,

$$\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint\limits_D (Q_x - P_y)\,dxdy = \iint\limits_D 2\,dxdy = 2 \cdot A(D)$$

El área de D es el área encerrada por el círculo de radio 5 (25π) menos el área encerrada por la elipse de semiejes 1 y 2 (2π). Luego,

$$\mathbf{S} = 2(25\pi - 2\pi) = 46\pi$$

$\blacksquare$

(4) Determine las funciones $P = P(x,y)$, $Q = Q(y)$ de modo que, para toda curva cerrada simple γ que encierre una región R, se cumplan las tres relaciones:

$$-\int_\gamma Q\,dx = A(R)\ , \quad \int_\gamma (P+Q)\,dx + (2P+Q)\,dy = A(R)\bar{x}_R\ ,$$

$$\int_\gamma -2P\,dx + (2Q-P)\,dy = A(R)\bar{y}_R$$

donde $A(R)$ denota el área de la región R, y $(\bar{x},\bar{y})_R$ son las coordenadas de su centroide.

Solución:

Sabemos que

$$A(R) = -\int_\gamma y\,dx$$

Luego, se cumple el primer requerimiento si $\boxed{Q(y) = y}$. Por otro lado, por el Teorema de Green,

$$\begin{aligned} A(R)\bar{x}_R &= \int_\gamma (P+Q)\,dx + (2P+Q)\,dy &= \int_\gamma (P+y)\,dx + (2P+y)\,dy \\ & &= \iint\limits_R \Big((2P+y)_x - (P+y)_y\Big)\,dxdy \\ & &= \iint\limits_R \Big(2P_x - P_y - 1\Big)\,dxdy \end{aligned}$$

Pero, se sabe que

$$A(R)\bar{x}_R = \iint\limits_R x \; dxdy$$

Así, la igualdad se cumple si escogemos P tal que

$$2P_x - P_y - 1 = x \quad \longrightarrow \quad 2P_x - P_y = 1 + x \tag{12}$$

De manera análoga,

$$\begin{aligned} A(R)\bar{y}_R \;=\; \int_\gamma (-2P)\; dx + (2Q - P)\; dy \;&=\; \int_\gamma (-2P)\; dx + (2y - P)\; dy \\ &=\; \iint\limits_R \Big((2y - P)_x + 2P_y \Big)\; dxdy \\ &=\; \iint\limits_R \Big(-P_x + 2P_y \Big)\; dxdy \end{aligned}$$

Y como $A(R)\bar{y}_R = \iint\limits_R y \; dxdy$ obtenemos, igualando,

$$-P_x + 2P_y = y \tag{13}$$

Las igualdades (12) y (13) nos proporcionan un sistema de ecuaciones lineales para $P_x,\ P_y$. Resolviéndolo obtenemos:

$$P_x = \frac{1}{3}(2x + y + 2) \qquad \wedge \qquad P_y = \frac{1}{3}(x + 2y + 1)$$

Integrando P_x con respecto a x,

$$P = \frac{x^2 + xy + 2x}{3} + \varphi(y)$$

siendo $\varphi(y)$ una función a determinar. Derivando P con respecto a y e igualando,

$$P_y = \frac{x}{3} + \varphi'(y) = \frac{x}{3} + \frac{2y + 1}{3}$$

De allí resulta que

$$\varphi'(y) = \frac{2y + 1}{3} \quad \longrightarrow \quad \varphi(y) = \frac{y^2 + y}{3}$$

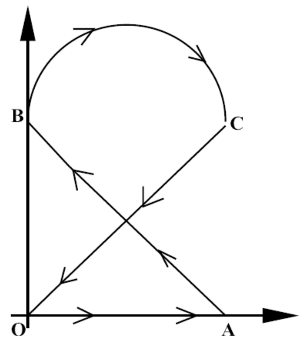
Finalmente,

$$\boxed{P(x,y) = \frac{x^2 + y^2 + xy + 2x + y}{3}}$$

$\blacksquare$

(5) *a*) Considere los puntos $O=(0,0), A=(1,0), B=(0,1)$ y $C=(1,1)$, y la curva $\gamma = OABCO$ de la figura. El arco que une B con C es un semicírculo. Sean $P(x,y), Q(x,y)$ funciones con $P_x = 1, P_y = 2, Q_x = -1, Q_y = -3$ para todo (x,y). Evalúe

$$\int_\gamma (P+2Q)\ dx + (Q-P)\ dy$$



b) Probar que $\vec{F} = (e^{y^2z}+2xy^2, 2xyze^{y^2z}, xy^2e^{y^2z})$ no es conservativo, pero que existe una función $f=f(t)$ de modo que

$$\vec{G}(x,y,z) = \left(e^{y^2z} + 2xy^2, 2xyze^{y^2z} + \frac{f(xy)}{y}, xy^2e^{y^2z}\right)$$

es conservativo.

Solución:

a) Escribimos $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, donde γ_1 es el triángulo inferior $OADO$ –D es el punto de intersección entre $\overline{BA}, \overline{CO}$– y γ_2 es el trozo $DBCD$, cada uno orientado según lo indican las flechas. Así,

$$\int_\gamma = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}$$

y cada una de ellas se puede hacer apelando al Teorema de Green. Si D_1, D_2 son las regiones encerradas por γ_1, γ_2, respectivamente,

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} (P+2Q)\ dx + (Q-P)\ dy &= \iint_{D_1} \Big((Q-P)_x - (P+2Q)_y\Big)\ dA \\
&= \iint_{D_1} \Big(Q_x - P_x - P_y - 2Q_y\Big)\ dA \\
&= \iint_{D_1} 2\ dA \ = \ 2A(D_1) \\
&= 2 \times \frac{1}{4} \ = \ \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

ya que $D = (1/2, 1/2)$. De forma análoga,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} (P+2Q)\ dx + (Q-P)\ dy &= -\iint_{D_2} \Big((Q-P)_x - (P+2Q)_y\Big)\ dA \\ &= -2A(D_2) \ = \ -2 \times \left(\frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}\right) \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Por tanto, sumando llegamos a

$$\int_{\gamma} (P+2Q)\ dx + (Q-P)\ dy = -\frac{\pi}{4}$$

b) Como $\vec{F}$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en todo $\mathbb{R}^3$, tenemos que

$$\vec{F} \text{ es conservativo si y solo si } \nabla \times \vec{F} = \vec{0}$$

Ahora bien,

$$\nabla \times \vec{F} = \Big(2xyze^{y^2z} - 2xyze^{y^2z},\ y^2e^{y^2z} - y^2e^{y^2z},\ 2yze^{y^2z} - 2yze^{y^2z} - 4xy\Big) = (0, 0, -4xy)$$

y por tanto el campo no es conservativo. Procediendo de manera análoga,

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{G} &= \left(2xyze^{y^2z} - 2xyze^{y^2z},\ y^2e^{y^2z} - y^2e^{y^2z},\ 2yze^{y^2z} + \frac{y}{y}f'(xy) - 2yze^{y^2z} - 4xy\right) \\ &= (0, 0, f'(xy) - 4xy)\end{aligned}$$

Luego, para que sea conservativo, se precisa que:

$$f'(xy) = 4xy \quad \xrightarrow[t=xy]{} \quad f'(t) = 4t$$

por lo cual podemos elegir $f(t) = 2t^2$.

■

6. Divergencia y Rotor

6.1. Integrales de superficie y Teorema de la Divergencia

(1) Encuentre el área:

a) De la porción de superficie $z = x^2 - y^2$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

b) De la región comprendida por el manto de ecuación $z = x^2 - y^2 + 4$, en plano XY y el cilindro unitario.

Solución:

Recordemos que:

$*$ Una integral de superficie de un campo escalar se define como:

$$\iint_S f \; dS = \iint_R f(S(u,v)) \|S_u \times S_v\| \; dudv$$

con R la región dominio de los parámetros u, v.

$*$ Para un campo vectorial:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \; dS = \iint_R F(S(u,v)) \cdot (S_u \times S_v) \; dudv$$

con la condición que el vector normal a S, calculado en la práctica como el producto cruz de los tangentes, esté apuntando hacia fuera de la superficie. A esta integral también se le conoce como el *flujo normal exterior* de $\vec{F}$ a través de la superficie S.

a) Parametricemos la porción de superficie por

$$S(x,y) = (x, y, x^2 - y^2)$$

con $x^2 + y^2 \leq= 1$. Un cálculo inmediato nos da el elemento de área:

$$dS = \left\| \frac{\partial S}{\partial x} \times \frac{\partial S}{\partial y} \right\| = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$$

De este modo, el área A de la porción de superficie está dada, en polares, por

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} r \; drd\theta = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} r \; dr = \frac{\pi}{6} \left(5^{3/2} - 1\right)$$

b) Dada la forma de la región, elegimos expresar las superficies en coordenadas cilíndricas. Primero, calculamos el área del manto. Podemos parametrizarlo como $M(x,y) = (x, y, x^2 - y^2 + 4)$, entonces la parametrización en coordenadas cilíndricas será:

$$M(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r^2\cos 2\theta + 4)$$

con $r \int [0,1],\ \theta \in [0, 2\pi]$. Entonces, la normal viene dada por:

$$\vec{n} = M_r \times M_\theta = (-2r^2\cos\theta, 2r^2\sin\theta, r)$$

Así, el área es

$$\begin{aligned} A &= \iint_R \|\vec{n}\|\ drd\theta \ = = \iint_R \sqrt{4r^4\cos^2\theta + 4r^4\sin^2\theta + r^2}\ drd\theta \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r\sqrt{4r^2+1}\ drd\theta \ = \ 2\pi(4r^2+1)^{3/2}\ \frac{2}{8\cdot 3}\Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{6}\left(5^{3/2} - 1\right) \end{aligned}$$

Para el borde, dado por el cilindro, lo que haremos no es la integral de superficie, sino "cortar" el cilindro y estirarlo en el plano. La condición para el cilindro es $r^2 = 1$, y ya sabemos que la altura está determinada por el manto y vale $z = r^2\cos 2\theta + 4$. Combinando ambas cosas, y el hecho de que al estirar el cilindro la longitud en el plano de la región (la variable) será θ, queda que el área vale:

$$\int_0^{2\pi} \cos 2\theta + 4\ d\theta = 8\pi$$

Por último, la base es un disco, cuya área es π. Luego, el área total del sólido es:

$$A_{total} = \frac{\pi}{6}\left(5^{3/2} - 1\right) + 9\pi$$

■

(2) Sea S la superficie del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, el plano $x + z = 4$ y el plano XY. Hallar el flujo hacia fuera, a través de S, del campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(x^2 + e^y,\ xy - \tan(z),\ \sin(x)\right)$$

Solución:

Enunciemos el siguiente teorema:

Teorema (de la Divergencia): Sea $\mathcal{S}$ una superficie orientable, cerrada y regular a tramos que encierra una región Ω, i.e. $\partial\Omega = \mathcal{S}$. Sea $\hat{n}$ la normal exterior de la superficie y $\vec{F} = (P, Q, R)$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$. Entonces,

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{F}\cdot\hat{n}\ dS = \iiint_{\Omega} \nabla\cdot\vec{F}\ dxdydz$$

Usaremos el Teorema de la Divergencia, pues deseamos calcular el flujo en una **superficie cerrada**. Sea R el sólido encerrado por la superficie (el que está dentro del cilindro, entre los planos XY y $x+z=4$):

$$R = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 4,\ 0 \leq z \leq 4-x\}$$

Por otra parte,

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(x^2+e^y\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(xy - \tan(z)\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(\sin(x)\Big) = 3x$$

Por lo tanto,

$$\Phi = \iiint\limits_R \nabla \cdot \vec{F}\ dxdydz = 3\iint\limits_D x\left(\int_0^{4-x} dz\right)\ dxdy = 3\iint\limits_D x(4-x)\ dxdy$$

siendo $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 4\}$. Calculamos la integral en D usando coordenadas polares:

$$\begin{aligned}
\Phi &= 3\int_0^2\int_0^{2\pi} r\cos\theta(4-r\cos\theta)\ rd\theta dr \\
&= 3\int_0^2\int_0^{2\pi} (4r^2\cos\theta - r^3\cos^2\theta)\ d\theta dr \\
&= 3\int_0^2 4r^2\ dr \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\theta\ d\theta}_{0} - 3\int_0^2 r^3\ dr \underbrace{\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)\ d\theta}_{\pi} \\
&= -12\pi
\end{aligned}$$

■

(3) Considere la región Ω dada por $x^2+2y^2+4z^2 \leq 1$, $z \geq 0$, y un campo vectorial $\vec{F} = (P,Q,R)$ con $P_x + Q_y = 3$, $R(x,y,z) = x^2+y^2$. Evalúe el flujo

$$\iint\limits_S \vec{F}\cdot\hat{n}\ dS$$

donde S es la porción de $x^2+2y^2+4z^2 = 1$ con $z \geq 0$, y $\hat{n}$ es la normal unitaria apuntando hacia fuera del elipsoide.

Solución:

Sea S_1 el disco $S_1 = \{x^2+2y^2 \leq 1\}$, con normal hacia abajo. Entonces, $S \cup S_1$ constituye una superficie cerrada, orientada positivamente hacia afuera, que es frontera del conjunto Ω.

Aplicando el Teorema de la Divergencia a Ω tenemos que:

$$\iiint\limits_\Omega \nabla\cdot\vec{F}\ dxdydz = \iint\limits_{S+S_1} \vec{F}\cdot\hat{n}\ dS = \iint\limits_S \vec{F}\cdot\hat{n}\ dS + \iint\limits_{S_1} \vec{F}\cdot\hat{n}\ dS$$

de donde

$$\Phi = \iint\limits_{S} \vec{F}\cdot\hat{n}\; dS = \underbrace{\iiint\limits_{\Omega} \nabla\cdot\vec{F}\; dxdydz}_{I_1} - \underbrace{\iint\limits_{S_1} \vec{F}\cdot\hat{n}\; dS}_{I_2}$$

Calculamos, a continuación, los valores de dichas integrales.

- Por hipótesis, tenemos que

  $$\nabla\cdot\vec{F} = P_x + Q_y + R_z = 3 + \frac{\partial}{\partial z}\Big(x^2+y^2\Big) = 3$$

  Por tanto, usando coordenadas cilíndricas para describir la región Ω,

  $$x = r\cos\theta,\;\; y = \frac{r\sin\theta}{\sqrt{2}},\;\; z = z \quad\longrightarrow\quad \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

  se obtiene que:

  $$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega} \nabla\cdot\vec{F}\; dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-r^2}/2} \frac{3r}{\sqrt{2}}\; dzdrd\theta \\ &= \frac{3\cdot 2\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\; dr \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{2}\end{aligned}$$

  que corresponde a I_1.

- Como S_1 está orientada hacia abajo, $\hat{n} = (0,0,-1)$. Con ello,

  $$\iint\limits_{S_1} \vec{F}\cdot\hat{n}\; dS = \iint\limits_{S_1} (P,Q,R)\cdot(0,0,-1)\; dS = -\iint\limits_{S_1} R\; dS = -\iint\limits_{S_1} x^2+y^2\; dS$$

  Usando:

  $$x = r\cos\theta,\;\; y = \frac{r\sin\theta}{\sqrt{2}} \quad\longrightarrow\quad \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

  Ahora, la segunda integral queda expresada como:

  $$\begin{aligned} I_2 &= -\int_0^1\int_0^{2\pi} r^2\cos^2\theta + \frac{r^2}{2}\sin^2\theta\; \frac{r}{\sqrt{2}} d\theta dr \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{r^3}{2}\; dr \int_0^{2\pi} 2\cos^2\theta + \sin^2\theta\; d\theta \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{8}\cdot 3\pi \\ &= -\frac{3\sqrt{2}\pi}{16}\end{aligned}$$

Combinando ambos valores,

$$\Phi = I_1 - I_2 = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} + \frac{3\sqrt{2}\pi}{16} = \frac{11\sqrt{2}\pi}{16}$$

■

(4) Considere el campo en $\mathbb{R}^3$ dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + \cos y, y + e^{xz}, z)$. Calcule el flujo normal del campo en la superficie S en $\mathbb{R}^3$ definida por $z = x^2 + y^2,\ 1 \leq z \leq 4$.

Solución:

Usaremos el Teorema de la Divergencia, y para ello definiremos $\partial R = S \cup S_1 \cup S_2$, donde s_1, S_2 son las tapas superior e inferior –respectivamente– con vector normal apuntando hacia afuera.

Puesto que

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(x + \cos y\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(y + e^{xz}\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(z\Big) = 3$$

la integral de superficie pedida es igual a:

$$\Phi = 3\iiint\limits_R dV - \iint\limits_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{n}_1\ dS_1 - \iint\limits_{S_2} \mathbf{F} \cdot \hat{n}_2\ dS_2$$

Primero que todo, notamos que:

$$3\iiint\limits_R dV = 3 \cdot \mathrm{Vol}(R)$$

Calcularemos el volumen vía secciones transversales: cada sección transversal corresponde a un círculo de radio $\sqrt{z}$, por tanto:

$$\mathrm{Vol}(R) = \int_1^4 A(z)\ dz = \int_1^4 \pi z\ dz = \frac{15\pi}{2}$$

Las parametrizaciones para $S_1,\ S_2$ son:

$$S_1 :\ (r\cos\theta, r\sin\theta, 4)\ ,\quad 0 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$S_2 :\ (r\cos\theta, r\sin\theta, 1)\ ,\quad 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Sus respectivas normales son $\hat{n}_1 = (0, 0, 1),\ \hat{n}_2 = (0, 0, -1)$. Las integrales de superficie sobre cada tapa se reducen a:

$$\begin{aligned} \Phi_{S_1} &= \iint\limits_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{n}\ dS = \int_0^2 \int_0^{2\pi} 4r\ d\theta dr \\ &= 16\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{S_2} &= \iint\limits_{S_2} \mathbf{F} \cdot \hat{n}\ dS = \int_0^1 \int_0^{2\pi} -r\ d\theta dr \\ &= -\pi \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\Phi = 3 \cdot \frac{15\pi}{2} - 16\pi + \pi = \frac{15\pi}{2}$$

■

(5) Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el campo dado por $\mathbf{F}(x,y,z) = (x-1, y-3, z-8)$. Sea $B \subseteq \mathbb{R}^3$ la esfera unitaria, y sea C el cono dado por $z \geq 0,\ 4z^2 = 3(x^2+y^2)$. La intersección $B \cap C$ da origen a una curva Γ. Sea M la superficie cerrada compuesta por la porción de C que está debajo de Γ y por la porción de B que está sobre ella. Calcule el flujo normal exterior del campo a través de esta superficie.

Solución:

Es fácil ver que

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 3$$

Sea W la región acotada por M. Usando el Teorema de la Divergencia, encontramos que

$$\Phi = \iiint\limits_W \nabla \cdot \mathbf{F}\ dV = 3 \cdot \mathrm{Vol}(W)$$

Así, el problema se reduce a calcular un volumen. Usando coordenadas esféricas, encontramos que el cono puede ser descrito por $\phi = \phi_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$4r^2\cos^2\phi = 3r^2\sin^2\phi \quad \longrightarrow \quad |\tan\phi| = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Como $0 \leq z = r\cos\phi$, existe un único ángulo $\phi_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ que satisface la ecuación anterior. Así, tenemos la siguiente descripción para la región:

$$W = \{(r,\theta,\phi) : 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \phi \leq \phi_0\}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(W) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\phi_0} r^2 \sin\phi\ d\phi d\theta dr \\
&= 2\pi \int_0^1 r^2\ dr \int_0^{\phi_0} \sin\phi\ d\phi \\
&= \frac{2\pi}{3}\Big(1 - \cos\phi_0\Big)
\end{aligned}$$

Es fácil ver que:

$$\tan\phi_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \longrightarrow \quad \cos\phi_0 = \sqrt{\frac{3}{7}}$$

Finalmente,

$$\Phi = 2\pi\left(1 - \sqrt{\frac{3}{7}}\right)$$

■

(6) [**Propuesto**] Considerando la ley de Gauss,

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \hat{n} \; dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

con q la carga encerrada por la superficie $\mathcal{S}$, determine el campo eléctrico $\vec{E}$ de una esfera cargar uniformemente, de carga Q y radio a.

Solución:

Primero que todo, calculemos la densidad volumétrica de carga para la esfera:

$$\rho(r) = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\dfrac{4}{3}\pi a^3} = \frac{3Q}{4\pi a^3}$$

Por simetría, proponemos que $\vec{E} = E(r)\,\hat{r}$. Como superficies, tomaremos esferas de radio r con normal exterior $\hat{n} = \hat{r}$. Así,

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \hat{n} \; dS = \iint_{\mathcal{S}} E(r)\hat{r} \cdot \hat{r} \; dS = E(r) \; A(\mathcal{S}) = 4\pi r^2 \; E(r) = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Para calcular la carga encerrada, distinguimos dos casos:

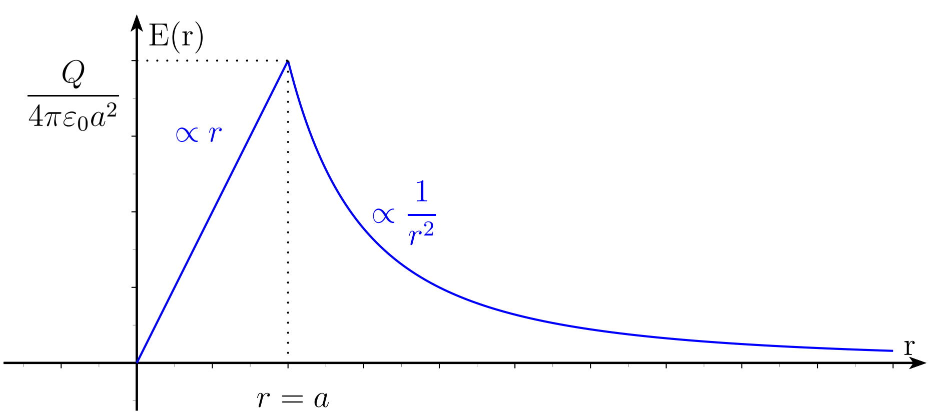
- $\boxed{r > a}$

$$q_{enc} = Q \quad \longrightarrow \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \, r^2}$$

- $\boxed{r < a}$

$$q_{enc} = \rho(r) \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = Q\left(\frac{r}{a}\right)^3 \quad \longrightarrow \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \, a^3} \; r$$

Notar que es continua en $r = a$. Así, el campo eléctrico tiene la siguiente forma:



■

6.2. Integrales de línea y Teorema de Stokes

(1) Calcule $\oint\limits_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, siendo

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(2y + \arcsin x,\ e^{y^2},\ y^2 + \ln\left(z^2 + 4\right)\right)$$

y $\mathcal{C}$ el contorno del triángulo con vértices en $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 2)$ recorrido en el orden que se indican los vértices.

Solución:

El cálculo directo de la integral de línea es muy complejo (se deja propuesto al lector), así que para evitar complicaciones recurriremos al siguiente teorema:

Teorema (de Stokes):

$$\oint\limits_{\partial \mathcal{S}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint\limits_{\mathcal{S}} \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \hat{n}\ dS$$

Notar que $\mathcal{S}$ es <u>cualquier</u> superficie que tenga a la curva $\partial \mathcal{S}$ como borde, orientada positivamente.

La superficie $\mathcal{S}$ más simple que cumple las hipótesis del Teorema de Stokes es el plano que pasa por los tres vértices, con ecuación $z = 2(1 - x - y)$. Por tanto,

$$\hat{n}\ dS = \frac{(-z_x, -z_y, 1)}{\|{z_x}^2 + {z_y}^2 + 1\|}\ dxdy = \frac{(2, 2, 1)}{3}\ dxdy$$

Por otro lado,

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = (2y, 0, -2)$$

Así, tenemos que:

$$\oint\limits_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{3} \iint\limits_{D} (2y, 0, -2) \cdot (2, 2, 1)\ dxdy = \frac{2}{3} \iint\limits_{D} (2y - 1)\ dxdy$$

donde D es la proyección de $\mathcal{S}$ sobre el plano XY. Esto es,

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x\}$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\oint\limits_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= 2\int_0^1 \int_0^{1-x} (2y-1)\; dydx \\
&= \frac{2}{3}\int_0^1 \left(y^2 - y\right)\Big|_0^{1-x}\; dx \\
&= \frac{2}{3}\int_0^1 (x^2 - x)\; dx \\
&= -\frac{1}{9}
\end{aligned}
$$

■

(2) Considere el plano $\mathcal{P} : x + y + z = 1$ con normal en la dirección $(1, 1, 1)$. Determine un campo $\vec{F}(x, y, z) = \Big(P(x), Q(y, z), R(y, z)\Big)$ de modo que, para toda curva cerrada simple $\gamma \subset \mathcal{P}$, se tenga que:

$$\oint\limits_{\gamma} \vec{F} \cdot \hat{t}\; ds = A(D)$$

donde $A(D)$ denota el área de la región $D \subset \mathcal{P}$ encerrada por γ.

Solución:

Se cumplen las condiciones para aplicar el Teorema de Stokes, según lo cual

$$\oint\limits_{\gamma} \vec{F} \cdot \hat{t}\; ds = \iint\limits_{D} \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \hat{n}\; dS$$

donde, de acuerdo al enunciado, $\hat{n} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Tenemos que:

$$\nabla \times \Big(P(x), Q(y, z), R(y, z)\Big) = (R_y - Q_z, 0, 0)$$

Así,

$$\oint\limits_{\gamma} \vec{F} \cdot \hat{t}\; ds = \iint\limits_{D} \frac{R_y - Q_z}{\sqrt{3}}\; dS$$

Obtenemos como resultado $A(D)$ si el integrando es 1, para la cual existen distintas combinaciones. Por ejemplo:

$$P = 0\;, \quad Q = 0\;, \quad R = y\sqrt{3} \quad \longrightarrow \quad \vec{F} = \sqrt{3}(0, 0, y)$$

o bien

$$P = 0\;, \quad Q = -z\sqrt{3}\;, \quad R = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{F} = \sqrt{3}(0, -z, 0)$$

■

(3) *a*) Muestre que si $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ son dos funciones a valores reales, entonces

$$\nabla \times (f\, \nabla g) = \nabla f \times \nabla g$$

b) Dadas $f(x,y,z) = x^2 + y^2$, $g(x,y,z) = \dfrac{\arctan(1+z^2)}{1+x^2+y^2}$, calcule la integral de superficie

$$\iint\limits_{\Sigma} \Big(\nabla f \times \nabla g\Big) \cdot \hat{n}\; dS$$

donde Σ es la superficie $x^2+y^2+z^2=1,\ z \geq 0$ y $\hat{n}$ es la normal que apunta hacia el origen.

Solución:

a) Recordemos que, para un campo vectorial $\vec{F} = (P, Q, R)$,

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\hat{k}$$

Para el campo vectorial $\vec{F} = f\ \nabla g$:

$$P = f\frac{\partial g}{\partial x},\ Q = f\frac{\partial g}{\partial y},\ R = f\frac{\partial g}{\partial z}$$

De aquí, la primera componente del rotor es

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(f\frac{\partial g}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(f\frac{\partial g}{\partial y}\right) = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}$$

Claramente el término de la derecha corresponde a la primera componente de $\nabla f \times \nabla g$. El mismo cálculo en las otras coordenadas nos conduce a:

$$\nabla \times \Big(f\, \nabla g\Big) = \nabla f \times \nabla g$$

b) Usando lo anterior, notamos que:

$$\iint\limits_{\Sigma} \Big(\nabla f \times \nabla g\Big) \cdot \hat{n}\; dS = \iint\limits_{\Sigma} \Big(\nabla \times (f\, \nabla g)\Big) \cdot \hat{n}\; dS$$

Aplicando el Teorema de Stokes al segundo término de la ecuación anterior, obtenemos:

$$\iint\limits_{\Sigma} \Big(\nabla \times (f\, \nabla g)\Big) \cdot \hat{n}\; dS = \oint\limits_{\gamma} f\, \nabla g \cdot \hat{t}\; ds$$

donde γ es la curva frontera de la superficie Σ, y como $\hat{t}$ es el tangente unitario de esta curva. La curva γ es una curva cerrada que se puede describir como

$$\gamma = \{x^2 + y^2 = 1,\ z = 0\}$$

Notamos que sobre esta curva la función f es constante e igual a 1. Deducimos que:

$$\oint_{\gamma} f\, \nabla g \cdot \hat{t}\ ds = \oint_{\gamma} \nabla g \cdot \hat{t}\ ds$$

Finalmente, puesto que la curva γ es cerrada, y la función g no tiene singularidades, concluimos que:

$$\oint_{\gamma} \nabla g \cdot \hat{t}\ ds = 0$$

En resumen,

$$\iint_{\Sigma} \left(\nabla f \times \nabla g\right) \cdot \hat{n}\ dS = 0$$

■

(4) Calcule $\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ si $\vec{F}(x,y,z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, z\right)$ y Γ es:

a) La intersección entre el cilindro $(x-2)^2 + y^2 = 1$ y el plano $x + z = 1$.

b) La intersección entre el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $x + z = 1$.

Solución:

Primero, vemos que:

$$\nabla \times \vec{F} = \left(0, 0, \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = (0,0,0)$$

para todo (x,y,z) con $x, y \neq 0$, i.e. todos los puntos fuera del eje Z.

a) En este caso, Γ es una curva cerrada que no toca ni encierra el eje Z, y por tanto podemos usar el Teorema de Stokes:

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{S} \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{n}\ dS$$

donde S es la porción del plano $x + z = 1$ encerrado por Γ, orientada hacia arriba. Pero, como $\nabla \times \vec{F} \equiv \vec{0}$ en S, tenemos que

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

b) A diferencia del caso anterior, esta vez la curva cerrada Γ sí encierra al eje Z, conjunto en el cual el rotor del campo **no está definido**. Por tanto, no podemos usar el Teorema de Stokes y deberemos integrar explícitamente.
Primero que todo, podemos parametrizar la curva mediante la función vectorial

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 1 - \cos t), \ 0 \le t \le 2\pi$$

con

$$\vec{r}\,'(t) = (-\sin t, \cos t, \sin t) \quad \wedge \quad \vec{F}(\vec{r}(t)) = (-\sin t, \cos t, 1 - \cos t)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) \ dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 + \sin t - \sin t \cos t \ dt \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

■

(5) Sean

$$\vec{F}_1(x,y) = \left(-\frac{y}{(x-1)^2+y^2}, \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}\right) \quad \wedge \quad \vec{F}_2(x,y) = \left(-\frac{y}{(x+1)^2+y^2}, \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2}\right)$$

Calcule $\displaystyle\oint_C \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right) \cdot d\vec{r}$ cuando C es:

a) La circunferencia $x^2 + (y-3)^2 = 1$, orientada contra–reloj

b) El triángulo con vértices $(-4,-2)$, $(0,0)$ y $(1,1)$ orientado contra–reloj

c) El triángulo con vértices $(-4,-2)$, $(4,-2)$ y $(0,2)$ orientado contra–reloj

Solución:

Los campos $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ son continuamente diferenciables en todo $\mathbb{R}^2$ excepto en los puntos $(1,)$ y $(-1,0)$, respectivamente. Además,

$$\nabla \times \vec{F}_1 = \nabla \times \vec{F}_2 = \vec{0}$$

excepto en los puntos antes aludidos.

a) La circunferencia encierra una región D que no contiene a los puntos de conflicto, por lo que se puede aplicar directamente el Teorema de Stokes y concluir que, con $\hat{n} = (0,0,1)$,

$$\oint_C \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right) \cdot d\vec{r} = \iint_D \nabla \times \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right) \cdot \hat{n} \ dS = 0$$

b) El triángulo mencionado encierra una región A que, al igual que en el caso anterior, no encierra puntos de conflicto. Así,

$$\oint\limits_C \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right) \cdot d\vec{r} = \iint\limits_A \nabla \times \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right) \cdot \hat{n}\ dS = 0$$

c) En esta parte, el triángulo C encierra una región T que contiene a ambos puntos de conflicto, por lo que no se puede aplicar el Teorema de Stokes directamente. Escribamos

$$\oint\limits_C \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right) \cdot d\vec{r} = \oint\limits_C \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \oint\limits_C \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}$$

y estudiemos la integral de $\vec{F}_1$. Sea $D_1 = \{(x-1)^2 + y^2 \leq \epsilon\}$, con $0 < \epsilon < 1$, suficientemente pequeño como para que D_1 esté contenido en la parte interior de T. Como $\widetilde{T} = T \backslash D_1$ es una región que no contiene a $(1,0)$ (i.e. removimos el punto donde $\vec{F}_1$ tiene problemas) podemos aplicar el Teorema de Stokes y concluir

$$\oint\limits_{\partial\widetilde{T}} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} = \iint\limits_{\widetilde{T}} \nabla \times \vec{F}_1 \cdot \hat{n}\ dS = 0$$

El borde de $\widetilde{T}$ consiste en el triángulo C original y la circunferencia $\Gamma_1 = \{(x,y) : (x-1)^2 + y^2 = \epsilon^2\}$. La orientación consistente para el Teorema de Stokes es $\partial\widetilde{T} = C \cup (-\Gamma_1)$, con C orientada contra–reloj y $(-\Gamma_1)$ orientada a favor del reloj. Así,

$$0 = \oint\limits_{\partial\widetilde{T}} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} = \oint\limits_C \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \oint\limits_{-\Gamma_1} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} \quad \longrightarrow \quad \oint\limits_C \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} = \oint\limits_{\Gamma_1} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}$$

Parametrizamos Γ_1 (contra–reloj) como

$$\gamma\theta = (\epsilon\cos\theta + 1, \epsilon\sin\theta),\ \theta \in [0, 2\pi] \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} \gamma'(\theta) = \epsilon(-\sin\theta, \cos\theta) \\ \vec{F}_1(\gamma(\theta)) = \left(-\dfrac{\epsilon\sin\theta}{\epsilon^2}, \dfrac{\epsilon\cos\theta}{\epsilon^2}\right) \end{array}$$

Concluimos que:

$$\oint\limits_C \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} = \oint\limits_{\Gamma_1} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\epsilon\sin\theta}{\epsilon^2}, \frac{\epsilon\cos\theta}{\epsilon^2}\right) \cdot \epsilon(-\sin\theta, \cos\theta)\ d\theta = 2\pi$$

Para la integral de $\vec{F}_2$ a lo largo de C, hacemos un análisis análogo considerando $D_2 = \{(x,y) : (x+1)^2 + y^2 \leq \epsilon^2\}$ y $\Gamma_2 = \{(x,y) : (x+1)^2 + y^2 = \epsilon^2\}$. En este caso, la conclusión es:

$$\oint\limits_C \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = \oint\limits_{\Gamma_2} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}$$

Parametrizando Γ_2 como $\gamma(\theta) = (\epsilon \cos\theta - 1, \epsilon \sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, obtenemos:

$$\oint\limits_C \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = \oint\limits_{\Gamma_2} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\epsilon \sin\theta}{\epsilon^2}, \frac{\epsilon \cos\theta}{\epsilon^2} \right) \cdot \epsilon(-\sin\theta, \cos\theta)\ d\theta = 2\pi$$

Finalmente,

$$\oint\limits_C \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 \right) \cdot d\vec{r} = 4\pi$$

■