Densidad del número 7 como primera cifra en las potencias positivas de 2

Felipe Riquelme

El objetivo de este post es dar una aplicación a los sistemas dinámicos a través de un problema bastante sencillo. Consideremos las potencias positivas de 2; es decir $1, 2, 4, 8, 16, ..., 2^n, ...$. El problema consiste en ver para cuántos números naturales n en promedio, el número 7 aparece como primera cifra de 2^n (de izquierda a derecha).

Para precisar un poco lo que haremos, consideremos el conjunto $N_{n,7} := \{0 \leq i \leq n \ :$ primera cifra de $2^i = 7\}$; es decir $N_{n,7}$ consiste de todos los enteros i comprendidos entre 0 y n tales que 2^i tiene a 7 como primera cifra. Naturalmente no hay una forma de definir un promedio para un conjunto infinito de números dentro de otro conjunto infinito, es por ello que usamos una noción parecida llamada *densidad*. La densidad es el promedio asintótico de números que satisfacen la propiedad requerida considerando conjuntos cada vez más grandes. La densidad que buscamos en nuestro caso es la siguiente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sharp N_{n,7}.$$

Resulta completamente necesario hacer una observación en el límite que venimos de definir. A priori no hay ningún motivo por el cual podamos asegurar que tal límite existe. Veremos mas adelante que efectivamente tal límite existe y podemos calcular su valor preciso.

Lo primero que debemos hacer para abordar este problema es ser capaces de calcular la primera cifra de 2^n de manera tal de definir el conjunto $N_{n,7}$ usando solo símbolos matemáticos. Definimos entonces la sucesión $a_n = \{\text{primera cifra de } 2^n\}$. Para hacer explícito el término a_n debemos escribir a 2^n en su forma decimal más simple, es decir $2^n = a_n 10^k + r_n$, donde $a_n \in \{1, 2, ..., 9\}$, $0 < r_n < 10^k$ y k es algún entero positivo que depende de n. Usando esta notación vemos que

$$10^k \leq 2^n < 10^{k+1}$$

por lo que

$$k \leq n \log_{10}(2) < k + 1.$$

Escribiremos $n \log_{10}(2) = k + b_n$ donde b_n es la parte decimal de $n \log_{10}(2)$. Es decir,

$$b_n = \{n \log_{10}(2)\} = n \log_{10}(2) - [n \log_{10}(2)].$$

De esta forma, $n \log_{10}(2) = k + b_n$ si y solamente si $2^n 10^{-k} = 10^{b_n}$.

Por otra parte sabemos que $a_n \leq 2^n 10^{-k} = a_n + r_n 10^{-k}$, por lo que $a_n = [2^n 10^{-k}]$ pues $r_n 10^{-k} < 1$. De esta forma concluímos que

$$a_n = [10^{b_n}].$$

Si $N \in \{1, ..., 9\}$ entonces la igualdad $a_n = N$ es equivalente a $[10^{b_n}] = N$. Dicho de otra forma $N \leq 10^{b_n} < N + 1$. Usando logaritmo en base 10 se tiene entonces $\log_{10}(N) \leq b_n < \log_{10}(N + 1)$. Recordemos que b_n es la parte decimal de $n \log_{10}(2)$ por lo que nos queda

$$n \log_{10}(2) \in [k + \log_{10}(N), k + \log_{10}(N + 1)).$$

Resumiendo... en nuestro caso tenemos $N = 7$ lo que implica que buscamos a todos los enteros n tales que $n\log_{10}(2) \in [k + \log_{10}(N), k + \log_{10}(N+1))$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Precisando al conjunto $N_{n,7}$ se tiene

$$N_{n,7} = \{0 \leq i \leq n \ : \ i\log_{10}(2) \in [k + \log_{10}(7), k + \log_{10}(7+1))\}.$$

¡Hagamos ahora un poco de dinámica! Consideremos un número real α que sin pérdida de generalidad supondremos que se encuentra en el intervalo unitario. Es posible definir un sistema dinámico llamado *rotación del círculo en ángulo* α. Definimos $\hat{T}_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $x \mapsto x + \alpha$, la cual es la traslación de parámetro α en los reales. $\hat{T}$ pasa al cociente por los enteros en una aplicación $T_\alpha : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.
La dinámica de T_α depende bastante de α. Si α es un número racional entonces todas las órbitas son periódicas. Tal dinámica es poco interesante pues si queremos estudiar el comportamiento de las iteraciones de los puntos mediante T_α, entonces todo punto regresa a sí mismo en un tiempo finito de iteraciones. En cambio, si α es un número irracional, todas las órbitas son densas (lo cual en cierto sentido nos dice que hay cierto nivel de caos en el sistema). En particular, si α es irracional entonces el conjunto $\mathcal{O}(0) := \{T_\alpha^n(0) : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. La órbita de $0 \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es puede escribir fácilmente como

$$\mathcal{O}(0) := \{n\alpha : n \in \mathbb{N}\}.$$

Quizás ahora resulta clara la conexión de ésta órbita con nuestro problema. Supongamos que $\alpha = \log_{10}(2)$ (¡el cual es un número irracional!). Si miramos la inclusión $n\log_{10}(2) \in [k + \log_{10}(N), k + \log_{10}(N+1))$ en el cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ se tiene

$$n\log_{10}(2) \in [\log_{10}(N), \log_{10}(N+1)).$$

Dicho de otra manera nos interesan los elementos de la órbita de 0 para el sistema dinámico $T_{\log_{10}(2)}$ tales que

$$T^n(0) \in [\log_{10}(N), \log_{10}(N+1)).$$

El siguiente teorema nos dice exactamente lo que necesitamos aplicar. Es un teorema de equidistribución para la rotación irracional del círculo.

Teorema 1. *Sea α un número irracional. Entonces la órbita $\{n\alpha\}$ $(mod 1)$ está equidistribuida en el círculo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Es decir, para todo intervalo $I \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ se tiene*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sharp\{0 \leq i \leq n \ : \ i\alpha \in I\} = |I|,$$

donde $|I|$ denota el largo del intervalo.

El teorema 1 nos dice dos cosas. De partida que el límite existe y segundo su valor exacto. Considerando la rotación irracional en ángulo $\log_{10}(2)$ concluímos directamente que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sharp N_{n,7} = \log_{10}(8) - \log_{10}(7) \approx 0{,}05799.$$

Queda como ejercicio para el lector hacer el cálculo de las otras densidades considerando cifras que van del 1 al 9. Naturalmente como esos son todos los valores posibles para la primera cifra de un número, la suma de todas las densidades debe ser igual a 1. Probablemente esto no sea tan raro en nuestro caso, después de todo ustedes verán que la suma de todas las densidades es simplemente una suma telescópica cuyo valor final será $\log_{10}(10) - \log_{10}(1)$