TAREA 1
ECUACIONES DIFERENCIALES (IMA1403)
FECHA DE ENTREGA: 03/10/2016.

Problema 1. Sea $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una function L-Lipschitz en la variable x. El objetivo de este problema es mostrar que para todo $(t_0, x_0) \in D$ existe a lo más una solución $x(t)$ para el PVI

$$\begin{cases} x' & = f(t,x), \\ x(t_0) & = x_0. \end{cases}$$

(1.a) Suponga que existen dos soluciones $x(t)$,$y(t)$ al PVI. Muestre que si $\sigma(t) = \|x(t) - y(t)\|^2$, entonces $\sigma'(t) \leqslant 2L\sigma(t)$.
(1.b) Demuestre que la función $t \mapsto \sigma(t)e^{-2Lt}$ es decreciente. Concluya que $x(t) = y(t)$ para todo $t \geqslant t_0$.
(1.c) Demuestre que la función $t \mapsto \sigma(t)e^{2Lt}$ es creciente. Concluya que $x(t) = y(t)$ para todo $t \leqslant t_0$.

Problema 2. Sea $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una function L-Lipschitz para todo $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$. Muestre que la iteración de Picard $x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_{n-1}(s))ds$, con $x_0(t) = x_0$, converge uniformemente en $[t_0 - T, t_0 + T]$. Concluya que el PVI

$$\begin{cases} x' & = f(t,x), \\ x(t_0) & = x_0 \end{cases}$$

tiene única solución en $[t_0 - T, t_0 + T]$.
(Hint: Demuestre que existe $a_n > 0$ tal que $\|x_n(t) - x_{n-1}(t)\| \leqslant a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$).

Problema 3. Verifique las series de taylor de $\cos(t)$ y $\sin(t)$ aplicando la iteración de Picard al PVI de primer orden asociado a la ecuación diferencial

$$\begin{cases} x'' & = -x, \\ x(0) & = 0, \\ x'(0) & = 1. \end{cases}$$