CONTROL 2 (PAUTA)
CÁLCULO 3 (IMA1301).

Problema. Considere el sistema

$$\begin{cases} 3x + y - u + 2v = 2 \\ x - 2y + u^2 + 2v^2 = 9. \end{cases}$$

(a) Comprobar que existe una vecindad de $(x_0, y_0) = (1, -1)$, y funciones $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$, tales que $u(1, -1) = 2$ y $v(1, -1) = 1$ que resuelven el sistema.
(b) Para la función u de la parte anterior, calcular $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.
(c) ¿Qué otro par de variables se puede expresar en términos de las dos variables restantes en vecindades del punto $(1, -1, 2, 1)$ de acuerdo al Teorema de la Función Implícita?

Solución. Notemos primero que si $F(x, y, u, v) = 3x+y-u+2v-2$ y $G(x, y, u, v) = x - 2y + u^2 + 2v^2 - 9$, entonces

$$F(1, -1, 2, 1) = 3 \cdot 1 + (-1) - 2 + 2 \cdot 1 - 2 = 0$$

y

$$G(1, -1, 2, 1) = 1 - 2 \cdot (-1) + (2)^2 + 2 \cdot (1)^2 - 9 = 0.$$

Por otra parte, como F y G son funciones polinomiales en 4 variables, ellas son de clase C^2. Finalmente, notemos que

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2u & 4v \end{vmatrix} = -4v - 4u,$$

por lo que

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}(1, -1, 2, 1) = -12 \neq 0.$$

Al tener todas las hipótesis del Teorema de la Función Implícita, podemos resolver el sistema mediante funciones $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$ de clase C^2.

Para resolver la segunda parte, observemos que de acuerdo al Teorema de la Función Implícita, se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}.$$

Además, sabemos que

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4v \end{vmatrix} = 4v + 4,$$

por lo que

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{v + 1}{u + v}.$$

Así,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{v+1}{u+v} \\ &= \frac{\frac{\partial v}{\partial x}(u+v)-(v+1)(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x})}{(u+v)^2}.\end{aligned}$$

Tanto $\frac{\partial u}{\partial x}$ como $\frac{\partial v}{\partial x}$ se calculan de manera análoga a $\frac{\partial u}{\partial y}$ a través del Teorema de la Función Implícita.

Teniendo ya la primera y segunda hipótesis del Teorema de la Función Implícita, vemos que es posible despejar implícitamente $x = x(u, v)$ y $y = y(u, v)$ dado que

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7 \neq 0.$$