PRUEBA 1
ESPACIOS MÉTRICOS (IMA1401)

Problema 1. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) dos espacios métricos. Se definen las métricas d_1 y d_∞ en el producto cartesiano $X \times Y$ respectivamente por

$$d_1(z_0, z_1) = d_X(x_0, x_1) + d_Y(y_0, y_1)$$

y

$$d_\infty(z_0, z_1) = \max\{d_X(x_0, x_1), d_Y(y_0, y_1)\},$$

donde $z_0 = (x_0, y_0)$ y $z_1 = (x_1, y_1)$. Demuestre que d_1 y d_∞ son fuertemente equivalentes.

Problema 2. Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ función continua.

(1) Demuestre que el gráfico $gr(f)$ de f es cerrado en $C := [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$.
(2) Demuestre que para todo $z_0 \in C$ existe $z_1 \in gr(f)$ tal que

$$d(z_0, gr(f)) = d(z_0, z_1).$$

Problema 3. Sea X un conjunto dotado con la métrica discreta. Si $A \subseteq X$ es un subconjunto cualquiera de X, determine los conjuntos $Adh(A)$ y $Acc(A)$.

Problema 4. Sea $\mathscr{C}^0_1([0, 1], \mathbb{R})$ el espacio de funciones continuas $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ con la métrica d_1 definida por

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

Demuestre que d_1 es efectivamente una métrica. Luego muestre que la sucesión de funciones $f_n(x) = x^n$ converge a la función $f_0 \equiv 0$.