PRUEBA 1
VARIEDADES DIFERENCIABLES (IMA2203)

Sea M una variedad topológica conexa. Sean $p, q \in M$ y $I = [0,1]$. Diremos que dos curvas $\gamma_0, \gamma_1 : I \to M$, con puntos inicial y final p y q respectivamente, son homotópicas (denotado $\gamma_0 \sim \gamma_1$), si existe una aplicación continua $A : I \times I \to M$ tal que

(i) $A(t,0) = \gamma_0(t)$, para todo $t \in I$,
(ii) $A(t,1) = \gamma_1(t)$, para todo $t \in I$,
(iii) $A(0,s) = p$ y $A(1,s) = q$, para todo $s \in I$.

Diremos que una curva $\gamma : I \to M$ es cerrada si $\gamma(0) = \gamma(1)$. Diremos que una variedad topológica X es *simplemente conexa* si toda curva cerrada en X es homotópica a una curva constante.

Problema

(a) Muestre que $\sim$ es una relación de equivalencia en M.

Si $p \in M$, denotamos $\pi_1(M,p)$ al conjunto de clases de equivalencia de curvas cerradas con punto inicial y final p.

(b) Muestre que $\pi_1(M,p)$ es un grupo con la operación inducida por la *concatenación de curvas*.
(c) Muestre que $\pi_1(M,p)$ y $\pi_1(M,q)$ son grupos isomorfos para todo $p, q \in M$.

Fijemos $p \in M$. Para $x \in M$ denote $\pi(p,x)$ al conjunto de clases de curvas homotópicas teniendo punto inicial p y punto final x. Defina $\widetilde{M}$ por

$$\widetilde{M} = \{(x,\alpha) : x \in M, \alpha \in \pi(p,x)\}.$$

Si $(x,\alpha) \in \widetilde{M}$ y $U \subset M$ es una vecindad de x abierta, conexa y simplemente conexa, definimos $[U,\alpha] \subset \widetilde{M}$ como el conjunto de puntos de la forma $(y,\beta) \in \widetilde{M}$ tales que $y \in U$ y $\beta = \alpha \cdot \delta$ (aquí $\cdot$ denota la operación concatenar), con δ siendo la clase de equivalencia de una curva uniendo x con y que permanece totalmente contenida en U. Denotaremos por $\mathfrak{B}$ a la colección de todos los conjuntos de la forma $[U,\alpha]$.

(d) Muestre que $\mathfrak{B}$ es base de alguna topología en $\widetilde{M}$.
(e) Muestre que la aplicación $p : \widetilde{M} \to M$, tal que $p(x,\alpha) = x$, es un homeomorfismo local.
(f) Muestre que $\widetilde{M}$ es Hausdorff.

(g) Muestre que $\widetilde{M}$ es conexo.
(h) Muestre que p verifica la propiedad de levantamiento de camino.
(i) Muestre que $\widetilde{M}$ es simplemente conexo.
(j) Encuentre una acción natural transitiva de $\pi_1(M,p)$ en $\widetilde{M}$.

Asuma el siguiente resultado:

Suponga que X es una variedad, Y es Hausdorff y $p : Y \to X$ es un homeomorfismo local con la propiedad de levantamiento de caminos. Entonces p es un cubrimiento.

(k) ¿Qué se puede concluir cuando M tiene una estructura de variedad diferenciable?.

Ejercicio 1 Sea $\mathscr{C} \subset \mathbb{R}^3$ la cuádrica determinada por la ecuación

$$2x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 6xz - 6x - 2z + 1 = 0.$$

Muestre que $\mathscr{C}$ es una subvariedad regular de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 2 Sean M y N subvariedades regulares de las variedades X y Y respectivamente. Muestre que $M \times N$ es subvariedad regular de $X \times Y$.

Ejercicio 3 Sea $O(n)$ el espacio de matrices ortogonales en $\mathscr{M}(n,\mathbb{R})$. Muestre que $O(n)$ es una subvariedad regular de $GL(n,\mathbb{R})$. ¿Cuál es su dimensión?

Ejercicio 4 Sea $\mathscr{G} \subset \mathbb{R}^2$ el gráfico de $f(x) = |x|$. Determine si $\mathscr{G}$ es o no es una subvariedad regular de $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 5 Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{N-n}$ función de clase C^∞. Muestre que

$$M = \{(x, f(x)), x \in U\}$$

es una subvariedad regular n-dimensional de $\mathbb{R}^N$.