PRUEBA 2
VARIEDADES DIFERENCIABLES (IMA2203)

Problema 1. [16 puntos,2,4,4,6] Sea M una variedad diferenciable conexa. Diremos que M es orientable si las funciones transición asociadas a las cartas locales preservan el signo de su jacobiano. Supondremos por simplicidad que toda variedad orientable tiene tales jacobianos de signo positivo.

(a) Sean M y N dos variedades diferenciables orientables y sea $F : M \to N$ un difeomorfismo suave. Considere la aplicación que a cada $p \in M$ le asigna el valor 1 o -1 dependiendo del signo positivo o negativo (respectivamente) de $\det(d_pF)$. Muestre que esta aplicación es constante.
(b) Defina el grado $\deg(F)$ de un difeomorfismo $F : M \to N$ como la constante de la parte anterior, i.e. $\deg(F) \in \{-1, 1\}$. Muestre que si F_1 y F_2 son difeomorfismos homotópicos en la clase de diferenciabilidad, entonces $\deg(F_1) = \deg(F_2)$.
(c) Sean $F : L \to M$ y $G : M \to N$ difeomorfismos de variedades suaves orientables. Muestre que $\deg(G \circ F) = \deg(G)\deg(F)$.
(d) Sea $M = \mathbb{S}^{2n}$. Muestre que no existe $X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ que no se anula en todo punto. (Hint: Asuma la existencia y luego considere la familia de transformaciones $F_t(p) = p\cos(\pi t) + X_p \sin(\pi t)$).

Problema 2. [24 puntos,4,4,6,6,4] Una variedad Riemanniana (M, g) se dice completa si la métrica Riemanniana g induce una distancia completa en M. En este problema mostraremos que si (M, g) es una variedad Riemanniana, entonces existe una métrica completa g' en M conforme a g, es decir tal que $g_x = e^{f(x)}g'_x$, con $f \in C^\infty(M)$.

Para $x \in M$ defina $r(x)$ como el supremo de los radios $r > 0$ tales que la bola abierta $B(x, r)$ es relativamente compacta en M.

(a) ¿Qué sucede si $r(x) = \infty$ para algún $x \in M$?
(b) Si $r(x) < \infty$ para todo $x \in M$, muestre que $r : M \to \mathbb{R}$ es continua.
(c) Argumente la existencia de una función $\omega \in C^\infty(M)$ tal que $\omega(x) > 1/r(x)$ para todo $x \in M$.

(d) Defina $g'_x = \omega(x)^2 g_x$. Muestre que $B'(x, 1/3) \subset B(x, r(x)/2)$, donde $B'(y, r)$ denota la bola de centro $y \in M$ y radio $r > 0$ para la distancia inducida por g'.
(e) Concluya.

Ejercicio 1. [**8 puntos**] Sea $F : M \to N$ un difeomorfismo de variedades suaves. Si $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(M)$, verifique la fórmula

$$dF([X, Y]) = [dF(X), dF(Y)].$$

Ejercicio 2. [**8 puntos**] Sea M variedad suave. Si $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ y $f, g \in C^\infty(M)$, verifique la fórmula

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X.$$

Ejercicio 3. [**8 puntos**] Determine T_eG, donde $G = SL(n, \mathbb{R})$.

Ejercicio 4. [**8 puntos**] Sea $p = (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$ un punto en $\mathbb{S}^{2n-1}$ y defina

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} -y_i \frac{\partial}{\partial x_i} + x_i \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

Verifique que X define un campo vectorial C^∞ en $\mathbb{S}^{2n-1}$ que no se anula en todo punto.

Ejercicio 5. [**8 puntos**] Considere $N \in \mathbb{S}^2$ el polo norte y la correspondiente proyección estereográfica. Determine explícitamente la métrica Riemanniana en $\mathbb{S}^2 \backslash \{N\}$ inducida por el pull-back de la métrica usual en $\mathbb{R}^2$ a través de la proyección. ¿Es posible extender dicha métrica a $\mathbb{S}^2$?

Ejercicio 6. [**8 puntos**] Sea M una variedad diferenciable compacta. Muestre que las distancias inducidas por las métricas Riemannianas en M son (dos a dos) equivalentes.