



PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATOLICA
DE VALPARAISO



PRUEBA 3
ESPACIOS MÉTRICOS (IMA1401)

Nota: Cada respuesta debe estar debidamente justificada. Salvo en el problema 1.b, se considera siempre la distancia usual en \mathbb{R}^n .

Problema 1. Sea $X = \mathbb{R}^2$ el plano euclideo y sea $C = [0, 1] \times [0, 1]$ el cuadrado unitario. Si d es distancia en X , denotaremos d_C la distancia inducida por d en C .

- (a) Si d es la métrica usual en \mathbb{R}^2 , ¿es (C, d_C) un espacio métrico compacto?
- (b) Si d es la métrica discreta en \mathbb{R}^2 , ¿es (C, d_C) un espacio métrico compacto?

Problema 2. Considere la curva $\gamma(t) = (e^t, e^{-t}) \in \mathbb{R}^2$, para $t \in [0, 1]$. Sea $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y - 1 = 0\}$. ¿Es cierto que existen puntos $p \in \gamma([0, 1])$ y $q \in C$, tales que la distancia entre $\gamma([0, 1])$ y C coincide con $d(p, q)$?

Problema 3. Sea $R \subset \mathbb{R}^2$ la región del plano definida por

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}.$$

Muestre que R es desconexo. Si consideramos ahora $R \cup \{(0, 0)\}$, ¿es este último un conjunto desconexo?